

# Notizen zur VO 'Klassische Differentialgeometrie'

Sommersemester 2022, Gudrun Szewieczek, TU Wien

## Vorwort

Diese Notizen sind als Hilfestellung zur Vorlesung gedacht. Sie umfassen alle Kapitel der Vorlesung; einige Teile (und vor allem Beispiele) werden jedoch in der Vorlesung ausführlicher besprochen. Eine Mitschrift aus der Vorlesung ist daher zur Prüfungsvorbereitung sehr empfehlenswert.

Die meisten Ideen und Inhalte für dieses Skript wurden aus der folgenden Literatur entnommen:

- J. Bolton, L. M. Woodward: *A First Course in Differential Geometry; Surfaces in Euclidean Space*. Cambridge University Press (2019)
- A. Gray, E. Abbena, S. Salamon: *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica; Third edition*. Chapman & Hall/CRC (2006)
- U. Hertrich-Jeromin, *Classical Differential Geometry*, Lecture notes (2018)
- D. Struik: *Lectures on Classical Differential Geometry; Second edition*. Dover, New York (1988)

Einige Beweise müssen aus Zeitgründen bzw. aus Mangel an Vorwissen aus anderen Bereichen der Mathematik leider weggelassen werden. Es handelt sich aber stets um bekannte Resultate der Differentialgeometrie, die in umfangreicheren Standardwerken zu finden sind.

In diese Notizen haben sich mit Sicherheit noch einige Tippfehler eingeschlichen. Ich freue mich jederzeit über Hinweise dazu per Mail oder im TUWEL-Nachrichtenforum.

Wir beschäftigen uns in dieser Vorlesung mit lokaler Kurven- und Flächentheorie im Euklidischen Raum und gehen aus Zeitgründen weder auf globale Fragestellungen noch auf Singularitäten und mögliche Abschwächungen von Voraussetzungen ein.

Im Gegenteil, an einigen Stellen werden wir generelle Voraussetzungen treffen, um die geometrischen Ideen in den Vordergrund zu rücken und uns die Arbeit zu erleichtern.

**Generelle Voraussetzung.** Alle Funktionen im Skript sind als glatt vorausgesetzt und werden auf einer 'passenden' Teilmenge definiert. Dies ist meist eine zusammenhängende, offene oder abgeschlossene Teilmenge.

# 1 Kurven

*Ein Punkt ist, was keine Teile hat. Eine Kurve ist eine Länge ohne Breite.*  
(Euklid, Elemente)

**Ziel:** wir wollen Kurven im  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$  beschreiben und geometrisch analysieren.

**Hilfsmittel:** Beschreibung von Kurven durch Parametrisierungen.

## 1.1 Parametrisierungen

### Definition 1.

Eine *parametrisierte Kurve* in  $\mathbb{R}^n$  ist eine glatte Abbildung

$$\gamma : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

von einem Intervall  $I$  in den  $\mathbb{R}^n$ . Die Abbildung  $\gamma$  wird auch *Parametrisierung* genannt und das Bild  $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$  heißt *Kurve*.

### Definition 2.

Eine parametrisierte Kurve  $\gamma : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *regulär*, falls

$$\gamma'(t) \neq 0 \text{ für alle } t \in I.$$

Ein Punkt der parametrisierten Kurve  $\gamma$  heißt *singulär*, falls  $\gamma'(t) = 0$ .

In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns mit *ebenen Kurven* im  $\mathbb{R}^2$  oder *Raumkurven* im  $\mathbb{R}^3$ .

### Beispiele 3.

Kreis I. Ein Kreis mit Mittelpunkt  $m \in \mathbb{R}^2$  und Radius  $r > 0$  wird durch die reguläre Parametrisierung

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto m + \{r \cos t, r \sin t\} \text{ beschrieben.}$$

Helix (Schraubenlinie). Die parametrisierte Kurve

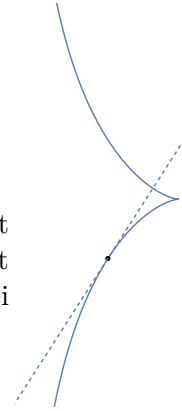
$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \{r \cos t, r \sin t, ht\},$$

wobei  $r > 0$  und  $h \in \mathbb{R}$  seien, wird *Helix* genannt und ist auf ganz  $\mathbb{R}$  regulär. Sie liegt auf dem Zylinder  $x^2 + y^2 = r^2$  und degeneriert für  $h = 0$  zu einem Kreis.

Traktrix (Schleppkurve). Die Kurve

$$\gamma : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \left\{ \sin t, \cos t + \ln \tan \frac{t}{2} \right\}$$

heißt *Traktrix* oder *Schleppkurve* (Vorstellung: man zieht einen störrischen Hund an der Leine nach). Die Kurve hat einen singulären Punkt bei  $t = \frac{\pi}{2}$  und besteht somit aus zwei regulären Teilkurven  $\gamma|_{(0, \frac{\pi}{2})}$  und  $\gamma|_{(\frac{\pi}{2}, \pi)}$ .



Halbkreis(e). Die zwei Parametrisierungen

$$\gamma_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \{rt, r\sqrt{1-t^2}\}$$

und

$$\gamma_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \{r \cos t, r \sin t\}$$

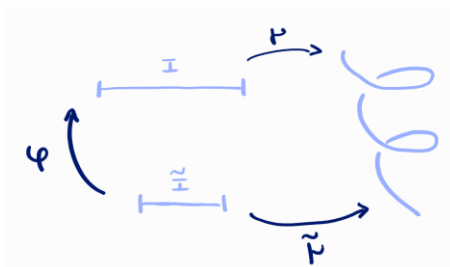
haben beide das gleiche Bild  $\gamma_1([-1, 1]) = \gamma_2([0, \pi])$  und beschreiben somit die selbe Kurve, nämlich einen Halbkreis. Die Parametrisierung einer Kurve ist also nicht eindeutig.

**Definition 4.**

Seien  $I, \tilde{I} \subset \mathbb{R}$  zwei Intervalle und  $\varphi : \tilde{I} \rightarrow I$  eine glatte, bijektive Abbildung mit  $\varphi'(\tilde{t}) \neq 0$  für alle  $\tilde{t} \in \tilde{I}$ . Eine parametrisierte Kurve  $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist eine *Umparametrisierung* der parametrisierten Kurve  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , falls

$$\tilde{\gamma}(\tilde{t}) = \gamma(\varphi(\tilde{t}))$$

für alle  $\tilde{t} \in \tilde{I}$  gilt.



Da  $\tilde{I} \ni t \mapsto \varphi'(t) \in \mathbb{R}$  eine glatte und nicht verschwindende Abbildung ist, wechselt  $\varphi'$  auf ganz  $\tilde{I}$  das Vorzeichen nicht. Falls  $\varphi' > 0$ , so sprechen wir von einer *orientierungserhaltenden* Umparametrisierung, falls  $\varphi' < 0$  handelt es sich um eine *orientierungsumkehrende* Umparametrisierung.

**Lemma 5.**

Die Umparametrisierung einer regulären Kurve ist wieder eine reguläre Kurve.

*Beweis.* Kettenregel. □

**Generelle Voraussetzung.** Ab jetzt beschäftigen wir uns mit regulären Kurven, es existiert also in jedem Punkt eine wohldefinierte Tangente.

**1.2 Länge einer Kurve**

**Ziel:** berechne die Länge einer Kurve.

**Strategie:** approximiere die Kurve durch infinitesimale Polygonzüge.

**Definition 6.**

Die *Länge* einer regulären Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist definiert als

$$\mathcal{L}([a, b]) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

**Lemma 7.**

Die Länge einer Kurve hängt nicht von der Parametrisierung ab.

*Beweis.* Sei  $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Umparametrisierung einer parametrisierten Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , sodass

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\varphi(t)).$$

Fall 1.  $\varphi$  definiert eine orientierungserhaltende Umparametrisierung, dann gilt

$$\int_c^d |\tilde{\gamma}'(t)| dt = \int_c^d |\gamma'(\varphi(t))| \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} |\gamma'(\varphi)| d\varphi = \int_a^b |\gamma'(\varphi)| d\varphi$$

und die beiden Kurven  $\gamma$  und  $\tilde{\gamma}$  haben die gleiche Länge.

Fall 2.  $\varphi$  definiert eine orientierungsumkehrende Umparametrisierung:

$$\int_c^d |\tilde{\gamma}'(t)| dt = - \int_c^d |\gamma'(\varphi(t))| \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(d)}^{\varphi(c)} |\gamma'(\varphi)| d\varphi = \int_a^b |\gamma'(\varphi)| d\varphi$$

und die beiden Längen stimmen wiederum überein. □

Eine Umparametrisierung einer Kurve hat also keinen Einfluss auf ihre Länge, jedoch auf die Geschwindigkeit mit der sie durchlaufen wird.

Eine parametrisierte Kurve  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  wird mit der *Geschwindigkeit*  $|\gamma'(t)|$  durchlaufen, die von der Parametrisierung abhängt, wie folgendes Beispiel verdeutlicht.

**Beispiel 8.**

Die drei Parametrisierungen

$$\begin{aligned}\gamma_1 &: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \{\cos t, \sin t\} \\ \gamma_2 &: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \{\cos 2t, \sin 2t\} \\ \gamma_3 &: [0, \sqrt{2\pi}] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \{\cos t^2, \sin t^2\}\end{aligned}$$

beschreiben die selbe Kurve, nämlich einen Kreis; dieser wird jedoch mit unterschiedlicher Geschwindigkeit durchlaufen:

$$|\gamma'_1| = 1, |\gamma'_2| = 2 \text{ und } |\gamma'_3| = \sqrt{2t}.$$

### 1.3 Bogenlängenparametrisierung

Unter den Parametrisierungen einer Kurve gibt es besondere, nämlich jene die die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen – wir beweisen die Existenz für jede reguläre Kurve.

**Definition 9.**

Eine Kurve  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist nach ihrer *Bogenlänge parametrisiert*, falls

$$|\gamma'(t)| = 1 \text{ für alle } t \in I$$

gilt; das heißt die Kurve wird mit konstanter Geschwindigkeit 1 durchlaufen.

Das folgende Lemma wird in der Folge viele Beweise vereinfachen, da wir oBdA voraussetzen können, dass eine Kurve nach ihrer Bogenlänge parametrisiert ist.

**Lemma 10.**

Jede reguläre Kurve kann nach ihrer Bogenlänge parametrisiert werden.

*Beweis.* Sei  $\gamma : I := [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine reguläre parametrisierte Kurve. Weiters definieren wir die Funktion

$$\begin{aligned}\varphi^{-1} &: I \rightarrow \tilde{I}, \\ \varphi^{-1}(t) &:= \int_{t_0}^t |\gamma'(\tau)| d\tau.\end{aligned}\tag{1}$$

Da  $(\varphi^{-1})' > 0$ , ist die Funktion  $\varphi^{-1}$  streng monoton wachsend und daher bijektiv und invertierbar. Somit definiert  $\varphi$  eine Umparametrisierung

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\varphi(s))$$

und wir erhalten ( $t = \varphi(s)$ )

$$\begin{aligned} |\tilde{\gamma}'(s)| &= |\gamma'(t)\varphi'(s)| \\ &= |\gamma'(t)\frac{1}{(\varphi^{-1})'(t)}| \\ &= \left|\frac{\gamma'(t)}{\gamma'(t)}\right| = 1. \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass  $\tilde{\gamma}(s)$  nach der Bogenlänge parametrisiert ist.  $\square$

**Bemerkung 11.**

Eine Parametrisierung nach der Bogenlänge ist eindeutig bis auf die Wahl des Anfangspunkts  $t_0 \in I$  und der Orientierung: die Funktion  $-\varphi^{-1}$  definiert ebenso eine Bogenlängenparametrisierung.

**Beispiel 12.**

Kreis.  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \{r \cos t, r \sin t\}$

Bogenlänge:  $\int_0^t |\gamma'(\tau)| d\tau = \int_0^t r d\tau = rt =: \varphi^{-1}(t) \Rightarrow \varphi(s) = \frac{s}{r}$

Bogenlängenparametrisierung:  $s \mapsto \tilde{\gamma}(s) := \{r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r}\}$

Helix.  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \{r \cos t, r \sin t, ht\}$

Bogenlänge:  $\int_0^t |\gamma'(\tau)| d\tau = \int_0^t \sqrt{r^2 + h^2} d\tau = \sqrt{r^2 + h^2}t \Rightarrow \varphi(s) = \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}$

Bogenlängenparametrisierung:  $s \mapsto \{r \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, r \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, \frac{hs}{\sqrt{r^2 + h^2}}\}$

**1.4 Rahmen für Kurven im  $\mathbb{R}^3$**

Eine reguläre Kurve  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  besitzt in jedem Punkt  $t \in I$  einen wohldefinierten *Einheitstangentenvektor*

$$T(t) := \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|},$$

der eine eindeutige *Normalebene*  $\mathcal{N}(t)$  definiert:

$$\mathcal{N}(t) := \{p \in \mathbb{R}^3 \mid p \cdot T(t) = \gamma(t) \cdot T(t)\}.$$

**Definition 13.**

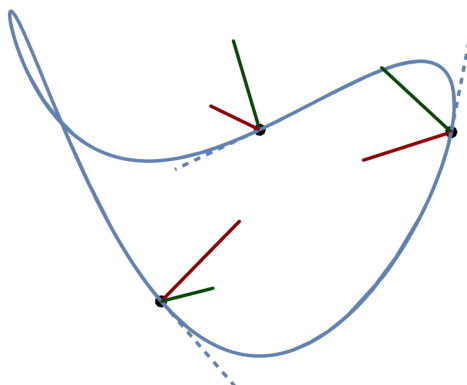
Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine reguläre Kurve. Ein Vektorfeld  $N : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt *Einheitsnormalenfeld* von  $\gamma$ , falls

$$N \cdot N = 1 \quad \text{und} \quad N \perp \gamma'.$$

Jedes Einheitsnormalenfeld  $N$  induziert eine Orthonormalbasis

$$F := (T, N, B), \quad \text{wobei} \quad B := T \times N;$$

die Basis  $F$  wird ein *Rahmen* für die *gerahmte Kurve*  $(\gamma, N)$  genannt.



**Bemerkung 14.**

Seien  $t \mapsto N(t)$  und  $t \mapsto \tilde{N}(t)$  zwei verschiedene Einheitsnormalenfelder für die Kurve  $\gamma$ , dann gibt es eine reelle Funktion  $t \mapsto \psi(t)$ , sodass

$$\tilde{N} = \cos \psi N + \sin \psi B, \text{ wobei } B = T \times N.$$

Die beiden dazugehörigen Rahmen unterscheiden sich durch eine Drehung:

$$\tilde{F} = F \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}.$$

Eine reguläre Kurve besitzt also viele verschiedene Rahmen, die jeweils durch Drehungen ineinander übergeführt werden können.

**Ausblick:** abhängig von der Situation werden wir 'besondere' Rahmen wählen, die jeweils an die geometrische Fragestellung angepasst werden.

**1.5 Frenet-Kurven**

Wir beginnen mit der Untersuchung einer Unterklasse der regulären Kurven, den Frenet-Kurven, die einen speziellen Rahmen zulassen.

Der Großteil dieses Abschnittes ist eine Wiederholung aus der LVA Modellierung und Visualisierung.

**Definition 15.**

Eine Kurve  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt *Frenet-Kurve*, falls für alle  $t \in I$  die *Frenet-Bedingung*

$$(\gamma' \times \gamma'')(t) \neq 0$$

erfüllt ist.

**Bemerkung 16.**

Die Frenet-Eigenschaft ist invariant unter Umparametrisierungen. [Beweis siehe Übungen]

**Proposition and Definition 17.**

Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Frenet-Kurve, dann definiert

$$t \mapsto N(t) := \frac{T'(t)}{|T'(t)|}$$

für alle  $t \in I$  ein wohldefiniertes Einheitsnormalenfeld von  $\gamma$ ; es wird das *Hauptnormalenfeld* der Frenet-Kurve genannt. Der dazugehörige Rahmen  $(T, N, B)$  heißt *Frenet-Rahmen*.

*Beweis.* Es müssen drei Bedingungen überprüft werden:

- Wohldefiniertheit: nach der Frenet-Bedingung gilt

$$(\gamma' \times |\gamma'|T')(t) = (\gamma' \times \gamma'')(t) \neq 0,$$

daher definiert  $t \mapsto N(t)$  auf  $I$  ein nicht-verschwindendes Vektorfeld.

- $|N(t)|^2 = 1$ : gilt nach der Definition von  $N$ .
- $N$  ist orthogonal zu  $T$ : da  $|T|^2 = T \cdot T = 1$ , erhalten wir aus der ersten Ableitung

$$T \cdot T' = 0.$$

Somit liefert  $t \mapsto N(t)$  ein wohldefiniertes Einheitsnormalenfeld für  $\gamma$ .  $\square$

Wir bemerken noch zwei Eigenschaften eines Frenet-Rahmens, die wir im Folgenden benutzen werden:

**Lemma 18.**

In einem Frenet-Rahmen gilt

$$T' \parallel N \quad \text{und} \quad B' \parallel N.$$

*Beweis.* Nach der Definition des Hauptnormalenfeldes ist  $T'$  parallel zu  $N$ . Differenzieren von  $B \cdot B = 1$  und  $B \cdot T = 0$  zeigt, dass auch  $B'$  parallel zu  $N$  ist.  $\square$

Unter Berücksichtigung von Lemma 18 machen wir folgende Definition:

**Definition 19.**

Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Frenet-Kurve mit Frenet-Rahmen  $(T, N, B)$ , dann heißen die Funktionen  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$T'(t) = |\gamma'(t)|\kappa(t)N(t) \quad \text{und} \quad B'(t) = -|\gamma'(t)|\tau(t)N(t)$$

die *Krümmung* und die *Torsion* einer Frenet-Kurve.



**Proposition 20.**

Der Frenet-Rahmen  $F = (T, N, B)$  einer Frenet-Kurve  $\gamma$  erfüllt die *Ableitungsgleichungen (Frenet-Serret-Formeln)*

$$F' = F\Phi, \quad \text{wobei} \quad \Phi = |\gamma'| \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}.$$

*Beweis.* Nach Definition 19 von  $\kappa$  und  $\tau$  bleibt die Gleichung

$$N' = |\gamma'| \{-\kappa T + \tau B\}$$

zu zeigen. Da  $N = -T \times B$  und  $T = N \times B$ , folgt

$$\begin{aligned} N' &= -(T' \times B) - (T \times B') \\ &= |\gamma'| \{-\kappa(N \times B) + \tau(T \times N)\} \\ &= |\gamma'| \{-\kappa T + \tau B\}. \end{aligned}$$

□

**Lemma 21.**

Die Krümmung und Torsion einer Frenet-Kurve sind gegeben durch

$$\kappa = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3} \quad \text{und} \quad \tau = \frac{\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{|\gamma' \times \gamma''|^2}.$$

*Beweis.* Nachrechnen oder LVA Modellierung und Visualisierung. □

**Ausblick:** wir werden später Kurven auf Flächen analysieren. Die Kurve 'erbt' dann ein Einheitsnormalenfeld von der Fläche, das die geometrischen Eigenschaften der Kurve auf der Fläche 'kodiert'. Auch wenn wir uns nur auf Frenet-Kurven auf der Fläche beschränken, liefert das 'geerbte' Einheitsnormalenfeld im Allgemeinen keinen Frenet-Rahmen.

**Ziel:** wir wollen daher eine Krümmungstheorie für reguläre Kurven bezüglich eines allgemeinen Rahmens entwickeln.

**1.6 Krümmungen bezüglich eines allgemeinen Rahmens****Proposition and Definition 22.**

Sei  $F = (T, N, B)$  ein Rahmen der regulären Kurve  $\gamma$ . Dann existieren eindeutige reelle Funktionen  $\kappa_n, \kappa_g$  und  $\tau$  sodass

$$F' = F\Phi, \quad \text{wobei} \quad \Phi = |\gamma'| \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_n & \kappa_g \\ \kappa_n & 0 & -\tau \\ -\kappa_g & \tau & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Diese Gleichungen heißen *Ableitungsgleichungen* für die gerahmte Kurve  $(\gamma, N)$ , wobei

- $\kappa_n$  die *Normalkrümmung*,
- $\kappa_g$  die *geodätische Krümmung* und
- $\tau$  die *Torsion*

genannt wird.

*Beweis.* Da  $T$ ,  $N$  und  $B$  Einheitsvektorfelder sind, die paarweise orthogonal aufeinander stehen, gilt für den Rahmen  $t \mapsto F(t) \in SO(3)$  und somit  $F^t F = id$ . Sei  $\Phi$  definiert durch  $F' = F\Phi$ , dann folgt

$$F^t F' = \Phi \quad \text{und} \quad F'^t F = \Phi^t$$

und daher

$$0 = (F^t F')' = (F'^t F) + (F^t F') = \Phi^t + \Phi.$$

Somit ist  $\Phi$  für alle  $t$  eine schiefsymmetrische Matrix und  $\Phi$  ist von der oben definierten Form mit eindeutigen Funktionen  $\kappa_n$ ,  $\kappa_g$  und  $\tau$ .  $\square$

**Bemerkung 23.**

Die Krümmungen  $\kappa_n$ ,  $\kappa_g$  sowie die Torsion  $\tau$  hängen von der Wahl des Rahmens ab, sind jedoch invariant unter Umparametrisierungen der Kurve!

**Beispiel 24.**

Sei  $t \mapsto \gamma(t) := (\cos t, \sin t, 0)$  der Einheitskreis in der  $xy$ -Ebene, dann liefert

$$\begin{aligned} t \mapsto T(t) &= (-\sin t, \cos t, 0), \\ t \mapsto N(t) &= (-\cos t, -\sin t, 0), \\ t \mapsto B(t) &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

einen Rahmen für  $\gamma$ . Aus den Ableitungsgleichungen folgt

$$\kappa_n = 1, \quad \kappa_g = 0 \quad \text{and} \quad \tau = 0.$$

Sei  $t \mapsto \varphi(t)$  eine glatte reelle Funktion, dann definiert

$$\begin{aligned} t \mapsto \tilde{N}(t) &= (-\cos \varphi \cos t, -\cos \varphi \sin t, \sin \varphi) \\ t \mapsto \tilde{B}(t) &= (\sin \varphi \cos t, \sin \varphi \sin t, \cos \varphi) \end{aligned}$$

einen weiteren Rahmen für den gilt

$$\tilde{\kappa}_n = \cos \varphi, \quad \tilde{\kappa}_g = \sin \varphi \quad \text{und} \quad \tau = \varphi'.$$

**Proposition 25.**

Sei  $t \mapsto \gamma(t)$  eine Frenet-Kurve. Die geodätische Krümmung verschwindet genau dann wenn  $\pm N$  das Hauptnormalenfeld von  $\gamma$  ist, d. h.  $F = (T, N, B)$  oder  $F = (T, -N, B)$  ist der Frenet-Rahmen.

*Beweis.* Sei  $F = (T, N, B)$  ein Rahmen mit

$$t \mapsto N(t) := \pm \frac{T'(t)}{|T'(t)|}.$$

Dann folgt aus den Ableitungsgleichungen (2)

$$\kappa_g = -\frac{1}{|\gamma'|} T' \cdot B = \mp \frac{|T'|}{|\gamma'|} N \cdot B = 0.$$

Umgekehrt, sei  $\kappa_g = 0$ , dann folgt aus den Ableitungsgleichungen

$$T' = |\gamma'| \kappa_n N.$$

Für alle  $t$  gilt  $\kappa_n(t) \neq 0$ , da

$$0 \neq \gamma' \times \gamma'' = (|\gamma'|T) \times (|\gamma'|T)' = (|\gamma'|T) \times (|\gamma'|'T + |\gamma'|T') = |\gamma'|^2 T \times T'.$$

Mit  $|T'| = |\gamma'| |\kappa_n|$ , folgern wir daher

$$N = \frac{T'}{|\gamma'| \kappa_n} = \pm \frac{T'}{|T'|}.$$

□

## 1.7 Parallele Rahmen

**Ziel:** untersuche Rahmen mit  $\tau \equiv 0$

**Intuition:** wir suchen Rahmen, die sich nicht um die Kurve winden, sondern nur entlang der Kurve verschoben werden

**Hilfsmittel:** Normalzusammenhang und Paralleltransport von Normalenfeldern

Wir entwickeln zuerst eine Theorie für allgemeine Normalenfelder, das heißt  $|N|^2 = 1$  wird nicht vorausgesetzt.

**Definition 26.**

Ein Normalenfeld  $t \mapsto N(t)$  entlang einer Kurve  $t \mapsto \gamma(t)$  heißt *parallel*, falls

$$\nabla^\perp N := N' - (N' \cdot T)T = 0;$$

$\nabla^\perp$  heißt der *Normalzusammenhang entlang von  $\gamma$* .

**Proposition 27.**

Sei  $t \mapsto \gamma(t)$  eine reguläre Kurve und  $\xi_0 \perp \gamma'(t_0)$  ein vorgegebener Vektor. Dann existiert ein eindeutiges paralleles Normalenfeld  $t \mapsto \xi(t)$  entlang der Kurve  $\gamma$  mit  $\xi(t_0) = \xi_0$ .

*Beweis.* OBdA nehmen wir an, dass die Kurve nach der Bogenlänge parametrisiert ist:  $|\gamma'|^2 \equiv 1$ .

Wir geben einen konstruktiven Beweis und konstruieren das gewünschte parallele Normalenfeld explizit. Dazu wählen wir einen beliebigen Rahmen  $F = (T, N, B)$  für  $\gamma$  und machen den Ansatz

$$\xi = \alpha N + \beta B,$$

wobei  $t \mapsto \alpha(t), \beta(t)$  reelle Funktionen sind (die Idee für diesen Ansatz kommt unter anderem von Bemerkung 14).

Mit Hilfe der Ableitungsgleichungen erhalten wir

$$\nabla^\perp \xi = (\alpha' - \tau\beta)N + (\beta' + \tau\alpha)B. \quad (3)$$

Da  $N$  und  $B$  linear unabhängig sind, gilt  $\nabla^\perp \xi = 0$  genau dann wenn die Koeffizienten in (3) verschwinden. Dies ist der Fall wenn

$$\begin{aligned} \alpha &= r_0 \sin(\varphi_0 + \varphi), & \beta &= r_0 \cos(\varphi_0 + \varphi) \\ \text{mit } \varphi(t) &= \int_{t_0}^t \tau(t) dt \text{ und } r_0, \varphi_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Um den gewünschten Anfangswert  $\xi(t_0) = \xi_0$  zu erhalten, wähle  $r_0 = |\xi_0|$  und  $\varphi_0 \in \mathbb{R}$  sodass

$$\frac{\xi_0}{|\xi_0|} = N \sin \varphi_0 + B \cos \varphi_0.$$

□

Wir wollen nun zwei wichtige Eigenschaften von parallelen Normalenfeldern beweisen; dazu benötigen wir folgendes Lemma:

**Lemma 28.**

Seien  $N_1$  und  $N_2$  zwei Normalenfelder, dann gilt

$$(N_1 \cdot N_2)' = \nabla^\perp N_1 \cdot N_2 + N_1 \cdot \nabla^\perp N_2.$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \nabla^\perp N_1 \cdot N_2 + N_1 \cdot \nabla^\perp N_2 &= (N_1' - (N_1' \cdot T)T) \cdot N_2 + (N_2' - (N_2' \cdot T)T) \cdot N_1 \\ &= N_1' \cdot N_2 + N_1 \cdot N_2'. \end{aligned}$$

□

**Proposition 29.**

Ein paralleles Normalenfeld hat konstante Länge. Zwei parallele Normalenfelder entlang einer Kurve  $\gamma$  schließen einen konstanten Winkel ein.

*Beweis.*

- Sei  $N$  ein paralleles Normalenfeld. Da

$$(|N|^2)' = 2N \cdot \nabla^\perp N = 0,$$

folgt  $|N|^2 \equiv \text{const}$  und  $N$  hat somit konstante Länge.

- Seien  $N_1$  und  $N_2$  zwei parallele Normalenfelder entlang der Kurve  $\gamma$ , dann gilt nach Lemma 28

$$(N_1 \cdot N_2)' = \nabla^\perp N_1 \cdot N_2 + N_1 \cdot \nabla^\perp N_2 = 0 \Rightarrow N_1 \cdot N_2 \equiv \text{const}.$$

Somit erhalten wir

$$\cos \angle(N_1(t), N_2(t)) = \frac{N_1(t) \cdot N_2(t)}{|N_1(t)||N_2(t)|} \equiv \text{const}.$$

□

Diese Proposition ist sehr hilfreich für unser ursprüngliches Ziel, die Konstruktion von speziellen Rahmen: wir wissen nun, dass auch parallele Einheits(!)normalenfelder existieren (es genügt die Wahl eines passenden Anfangswerts).

Zuvor wollen wir jedoch die Eigenschaften von parallelen Normalenfeldern noch in einem wichtigen Begriff zusammenfassen:

**Korollar and Definition 30.**

Parallele Normalenfelder entlang  $\gamma$  induzieren eine lineare Isometrie von einer Normalebene  $\mathcal{N}(t_0)$  bei  $\gamma(t_0)$  auf die Normalebene  $\mathcal{N}(t)$  bei  $\gamma(t)$ . Diese Isometrie heißt *Paralleltransport entlang von  $\gamma$* .

*Beweis.* Da für ein fixes  $\xi_0 \perp \gamma'(t_0)$  genau ein paralleles Normalenfeld

$$t \mapsto \xi(t) \text{ mit } \xi(t_0) = \xi_0$$

existiert, liefert diese Vorschrift genau eine Abbildung  $\mathcal{N}(t_0) \rightarrow \mathcal{N}(t)$ .

Diese Abbildung ist linear, da  $\nabla^\perp \xi = 0$  linear in  $\xi$  ist. Sie ist eine Isometrie, da parallele Normalenfelder konstante Länge haben und miteinander einen konstanten Winkel einschließen. □

Mit diesem Wissen können wir nun zu unserem Ziel zurückkommen und die gesuchten Rahmen konstruieren:

**Definition 31.**

Ein Rahmen  $(T, N, B)$  von  $\gamma$  heißt *parallel*, falls  $N$  und  $B$  parallel sind.

**Lemma 32.**

Sei  $(T, N, B)$  ein Rahmen für  $\gamma$ , dann gilt: ist  $N$  parallel, so ist auch  $B$  parallel.

*Beweis.* Sei  $(T, N, B)$  ein Rahmen für  $\gamma$  und  $N$  ein paralleles Normalenfeld. Wir müssen zeigen, dass  $B = T \times N$  dann auch parallel ist, d. h.  $\nabla^\perp B = 0$ . Eine kurze Rechnung zeigt, dass

$$\nabla^\perp B \perp T, N, B$$

und daher  $\nabla^\perp B = 0$  gilt. □

Da es zu jeder Kurve und einem Anfangswert ein paralleles Einheitsnormalenfeld gibt, existieren zu jeder Kurve parallele Rahmen. Diese erfüllen eine besondere Eigenschaft:

**Korollar 33.**

Sei  $(T, N, B)$  ein Rahmen für  $\gamma$ , dann gilt:  $\tau = 0$  genau dann wenn der Rahmen parallel ist.

*Beweis.* Der Beweis folgt aus den Ableitungsgleichungen:

$$\tau = \frac{1}{|\gamma'|} (N' \cdot B) = \frac{1}{|\gamma'|} (\nabla^\perp N \cdot B).$$

□

## 1.8 Hauptsatz der Kurventheorie

**Frage:** Aus welchen vorgeschriebenen geometrischen Daten können wir eine Kurve eindeutig rekonstruieren?

**Idee:** Rekonstruktion einer Kurve zu vorgegebenen Krümmungen  $\kappa_g$ ,  $\kappa_n$  und Torsion  $\tau$

**Theorem 34.**

Gegeben seien drei Funktionen von einem Intervall  $I$  nach  $\mathbb{R}$ ,

$$s \mapsto \kappa_n(s), \kappa_g(s), \tau(s).$$

Dann existiert eine nach ihrer Bogenlänge parametrisierte Kurve  $s \mapsto \gamma(s)$  mit einem Einheitsnormalenfeld  $s \mapsto N(s)$ , sodass  $\kappa_n$ ,  $\kappa_g$  und  $\tau$  die Normalkrümmung, die geodätische Krümmung und die Torsion bezüglich des Rahmens  $F = (T, N, B)$  sind.

Die rekonstruierte Kurve  $s \mapsto \gamma(s)$  ist bis auf Euklidische Bewegungen im  $\mathbb{R}^3$  eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Zu beweisen ist die Existenz einer Kurve  $s \mapsto \gamma(s)$  mit  $|\gamma'| = 1$  für die es einen Rahmen  $F = (T, N, B)$  gibt, sodass die Ableitungsgleichungen

$$F' = F\Phi, \quad \text{wobei} \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_n & \kappa_g \\ \kappa_n & 0 & -\tau \\ -\kappa_g & \tau & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

erfüllt sind. Der gesuchte Rahmen  $F$  muss also eine Lösung der Differentialgleichung (4) sein.

#### 1a. Existenz einer Lösung $t \mapsto F(t)$ für (4)

Da die Ableitungsgleichungen (4) ein lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung für  $F$  bilden, gibt es nach dem Theorem von Picard-Lindelöf für jeden Anfangswert  $F(s_0) = F_0$  eine eindeutige Lösung  $s \mapsto F(s)$ .

#### 1b. Existenz einer Lösung $s \mapsto F(s) \in SO(3)$

Damit eine Lösung von (4) einen Rahmen für unser Problem liefert, muss  $F(s) \in SO(3)$  für alle  $s$  gelten, d. h.  $\det(F) = 1$  und  $FF^t = E$ , wobei  $E$  die Einheitsmatrix bezeichne.

Wir wählen also eine Anfangsbedingung  $F_0 \in SO(3)$  und zeigen dass dann für die eindeutige Lösung  $s \mapsto F(s) \in SO(3)$  gilt. Da

$$(FF^t)' = F'F^t + FF'^t = F\Phi F^t + F\Phi^t F^t = F(\Phi + \Phi^t)F^t = 0,$$

folgt aus  $F_0 F_0^t = E$ , dass  $F(s)F^t(s) = E$  für alle  $s$  und  $F(s) \in O(3)$ .

Somit erhalten wir  $\det(F(s)) = \{-1, 1\}$  für alle  $s \in I$ . Wegen der Stetigkeit der Determinantenfunktion, wechselt  $s \mapsto \det(F(s))$  das Vorzeichen nicht und wir erhalten  $F(s) \in SO(3)$  für alle  $s$ .

#### 2. Wahl spezieller Anfangsdaten

Fixiere ein beliebiges  $s_0 \in I$  und wähle als Anfangswert  $F_0 := E$ . Diese Anfangsdaten liefern nach oben einen eindeutigen Rahmen

$$F = (T, N, B) \in SO(3)$$

als Lösung von (4).

3. Existenz der Kurve  $\gamma$  parametrisiert nach der Bogenlänge  
 Definiere eine Kurve  $s \mapsto \gamma(s)$  durch

$$\gamma(s) := \int_{s_0}^s T(\sigma) d\sigma.$$

Da  $|\gamma'| = 1$  nach Definition, ist  $\gamma$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Rahmen  $F$ , die die Ableitungsgleichungen (4) erfüllt.

4. Eindeutigkeit der Konstruktion

Angenommen  $s \mapsto F(s) \in SO(3)$  und  $s \mapsto \tilde{F}(s) \in SO(3)$  seien zwei Lösungen von (4). Dann gilt

$$(\tilde{F}F^{-1})' = (\tilde{F}F^t)' = \tilde{F}\Phi F^t + \tilde{F}\Phi^t F^t = 0$$

und daher  $\tilde{F}F^{-1} \equiv \tilde{F}(s_0)F^{-1}(s_0) =: A$ . Somit folgt

$$\tilde{T} = AT, \quad \tilde{N} = AN, \quad \tilde{B} = AB \quad \text{and} \quad \tilde{\gamma} = A\gamma + c, \quad (5)$$

wobei  $c \in \mathbb{R}$  eine beliebige Integrationskonstante bezeichnet. Die Konstruktion ist also bis auf Euklidische Bewegungen eindeutig.  $\square$



## 2 Flächen im $\mathbb{R}^3$

**Ziel:** wir wollen Flächen im  $\mathbb{R}^3$  beschreiben und geometrisch analysieren.

**Hilfsmittel:** Parametrisierungen.

### 2.1 Parametrisierungen einer Fläche

**Definition 35.**

Eine *parametrisierte Fläche (Flächenstück)* ist eine glatte Abbildung

$$\sigma : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3;$$

das Bild  $\sigma(U)$  heißt *Fläche* und  $\sigma(p)$  für ein  $p \in U$  wird *Flächenpunkt* genannt. Die Kurven

$$u \mapsto \sigma(u, v_0) \quad \text{und} \quad v \mapsto \sigma(u_0, v),$$

wobei  $(u_0, v_0) \in U$ , heißen *Parameterlinien*.

Jede parametrisierte Fläche besitzt also zwei Familien von Parameterlinien, die die Fläche erzeugen.

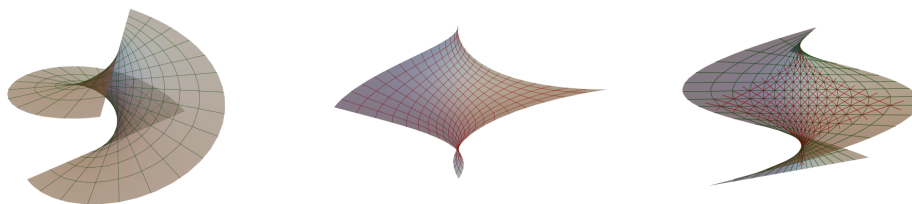
**Ausblick:** wie bei Kurven, wo wir die Existenz eines Tangentialvektors in jedem Punkt verlangt haben, stellen wir auch an Flächen Regularitätsbedingungen, die die Existenz einer Tangentialebene garantieren.

**Strategie:** die Tangentialvektoren der Parameterlinien durch einen Punkt sollen eine Ebene aufspannen.

**Definition 36.**

Eine parametrisierte Fläche  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt *regulär*, wenn ihr Differential  $D_p\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  für alle  $p \in U$  injektiv ist (d. h.  $\sigma_u(p)$  und  $\sigma_v(p)$  sind linear unabhängig für alle  $p \in U$ ). Regulär parametrisierte Flächen heißen auch *Immersionen*.

Ein Punkt  $p \in U$ , in dem das Differential  $D_p\sigma$  einer parametrisierten Fläche nicht injektiv ist, heißt *singulär*.



**Definition 37.**

Eine *Umparametrisierung* einer parametrisierten Fläche  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist eine neue parametrisierte Fläche

$$\tilde{\sigma}(\tilde{u}, \tilde{v}) := \sigma(\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})),$$

wobei  $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U$  ein Diffeomorphismus ist.

---

*Recap*

---

Ein Diffeomorphismus ist eine glatte, bijektive Abbildung mit glatter inverser Abbildung.

---

Ähnlich wie bei Kurven zeigt man, dass die Umparametrisierung einer regulären Fläche wieder regulär ist.

Auch wenn eine reguläre Fläche schon viele 'Problemstellen' ausschließt kann sie Selbstüberschneidungen haben, was bei der Untersuchung von Kurven auf einer Fläche zusätzliche technische Schwierigkeiten verursachen kann. Durch geeignetes Einschränken des Parameterbereichs  $U \subset \mathbb{R}^2$  wird eine reguläre Parametrisierung allerdings immer injektiv und Selbstüberschneidungen werden somit lokal vermieden. (vgl. auch das Konzept von 2-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten)

**Generelle Voraussetzung.** Ab jetzt betrachten wir Flächenstücke mit einer regulären und injektiven Parametrisierung  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

**Lemma 38.**

Sei  $U \ni (u, v) \mapsto \sigma(u, v) \in \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche und  $t \mapsto \alpha(t)$  eine reguläre Kurve auf der Fläche  $\sigma(U)$ . Dann existiert eine eindeutige, glatte Kurve  $t \mapsto \gamma(t)$  im Parameterbereich  $U$ , sodass

$$\alpha(t) = \sigma(\gamma(t)).$$

*Beweis.* Da wir  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$  als reguläre und injektive Parametrisierung

vorausgesetzt haben, existiert für alle  $t$  genau ein Punkt  $\gamma(t) \in U$ , sodass

$$\sigma(\gamma(t)) = \alpha(t).$$

Die Abbildung  $t \mapsto \gamma(t)$  definiert eine glatte Kurve, da sie als Komposition von zwei glatten Funktionen gegeben ist:  $\gamma = \sigma^{-1} \circ \alpha$ .  $\square$

**Definition 39.**

Ein Vektor  $\xi$  ist ein *Tangentialvektor* an die Fläche  $\sigma(U)$  im Flächenpunkt  $p \in \sigma(U)$ , falls eine Kurve  $t \rightarrow \alpha(t)$  auf  $\sigma(U)$  existiert, sodass

$$\alpha'(0) = \xi \quad \text{und} \quad \alpha(0) = p.$$

**Proposition and Definition 40.**

Sei  $U \ni (u, v) \mapsto \sigma(u, v)$  eine parametrisierte Fläche und  $p = \sigma(u_0, v_0)$  ein Flächenpunkt. Die Menge der Tangentialvektoren an die Fläche  $\sigma(U)$  im Flächenpunkt  $p$  ist die Ebene aufgespannt von  $\sigma_u(u_0, v_0)$  und  $\sigma_v(u_0, v_0)$ .

Diese Ebene wird *Tangentialebene* an die Fläche  $\sigma(U)$  im Punkt  $p$  genannt und mit  $T_p\sigma(U)$  bezeichnet.

*Beweis.* Da  $\sigma$  eine reguläre Parametrisierung ist, spannen  $\sigma_u$  und  $\sigma_v$  in der Tat eine Ebene auf. Sei  $t \mapsto \alpha(t)$  eine Kurve auf  $\sigma(U)$  durch  $p$ , dann existiert nach Lemma 38 eine Kurve  $t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \in U$ , sodass

$$\alpha(t) = \sigma(\gamma_1(t), \gamma_2(t)).$$

Somit ist  $\alpha'$  nach der Kettenregel eine Linearkombination von  $\sigma_u$  und  $\sigma_v$ .

Für den Beweis der Gegenrichtung, fixiere einen Flächenpunkt  $\sigma(u_0, v_0)$  und betrachte einen Vektor  $\xi = \lambda\sigma_u + \mu\sigma_v$ , der in der Ebene aufgespannt durch  $\sigma_u(u_0, v_0)$  und  $\sigma_v(u_0, v_0)$  liegt. Definiere

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in U$$

und  $\alpha(t) := \sigma(\gamma(t))$ . Dann gilt

$$\alpha' = \lambda\sigma_u + \mu\sigma_v$$

und  $\xi$  ist somit ein Tangentialvektor.  $\square$

**Bemerkung 41.**

Man kann zeigen, dass die Konstruktion der Tangentialebene unabhängig von der Wahl der Parametrisierung ist.

## 2.2 Die erste Fundamentalform

**Ziel:** Längen- und Winkelmessung auf einer Fläche

**Hilfsmittel:** definiere ein 'Skalarprodukt' auf den Tangential-  
ebenen  $\rightsquigarrow$  erste Fundamentalform

Die Tangentialebene  $T_p\sigma(U)$  im Punkt  $p = \sigma(u_0, v_0)$  kann mit Hilfe der Differentialabbildung mit  $\mathbb{R}^2$  identifiziert werden:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\mathbb{R}^2} & \longleftrightarrow & \boxed{T_p\sigma(U) \subset \mathbb{R}^3} \\ w = (w_1, w_2)^t \in \mathbb{R}^2 & & \xi \in T_p\sigma(U) \subset \mathbb{R}^3 \\ d_{(u_0, v_0)}\sigma(w) = (\sigma_u, \sigma_v)w = \sigma_u w_1 + \sigma_v w_2 = \xi & & \end{array}$$

Skalarprodukt zwischen zwei Tangentialvektoren:

$$\begin{array}{ccc} w, z \in \mathbb{R}^2 & \longleftrightarrow & \xi_1, \xi_2 \in T_p\sigma(U) \subset \mathbb{R}^3 \\ d_{(u_0, v_0)}\sigma(w) \cdot d_{(u_0, v_0)}\sigma(z) = \xi_1 \cdot \xi_2 & & \end{array}$$

**Lemma 42.**

Die Abbildung

$$\begin{aligned} I_{(u_0, v_0)} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (w, z) &\mapsto d_{(u_0, v_0)}\sigma(w) \cdot d_{(u_0, v_0)}\sigma(z) \end{aligned}$$

ist eine positiv definite, symmetrische Bilinearform auf  $\mathbb{R}^2$ .

*Beweis.* Nach der Definition des Skalarprodukts im  $\mathbb{R}^3$  ist  $I_{(u_0, v_0)}$  eine symmetrische Bilinearform.

Weiters, sei  $w \in \mathbb{R}^2$ , sodass

$$0 = I_{(u_0, v_0)}(w, w) = |d\sigma(w)|^2,$$

dann folgt auf Grund der Injektivität von  $d\sigma$ , dass  $w = 0$  und die Bilinearform  $I_{(u_0, v_0)}$  ist somit positiv definit.  $\square$

Daher lässt sich  $I_{(u_0, v_0)}$  für jeden Punkt  $(u_0, v_0) \in U$  mit Hilfe einer symmetrischen  $(2 \times 2)$ -Matrix darstellen:

$$\begin{aligned} I_{(u_0, v_0)}(w, z) &= d_{(u_0, v_0)}\sigma(w) \cdot d_{(u_0, v_0)}\sigma(z) \\ &= (\sigma_u w_1 + \sigma_v w_2) \cdot (\sigma_u z_1 + \sigma_v z_2)|_{(u_0, v_0)} \\ &= \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \sigma_u \cdot \sigma_u & \sigma_u \cdot \sigma_v \\ \sigma_u \cdot \sigma_v & \sigma_v \cdot \sigma_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Variieren des Punktes  $(u_0, v_0) \in U$ , führt zu folgender Definition:

**Definition 43.**

Sei  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche, dann heißt  $I := d\sigma \cdot d\sigma$  die *erste Fundamentalform* oder *induzierte Metrik von  $\sigma$* . Die Funktionen

$$E := \sigma_u \cdot \sigma_u, \quad F := \sigma_u \cdot \sigma_v \quad \text{und} \quad G := \sigma_v \cdot \sigma_v$$

heißen die *Koeffizienten der ersten Fundamentalform*.

Aus der Definition sehen wir, dass die Koeffizienten der ersten Fundamentalform von der Wahl der Parametrisierung abhängen.

**Bemerkung 44.**

Am Beispiel einer Ebene und eines Zylinders, bemerken wir außerdem, dass unterschiedliche Flächen die selbe erste Fundamentalform besitzen können, wenn wir die Parametrisierungen entsprechend wählen. Diese Tatsachen werden wir später genauer beleuchten.

In den folgenden Paragraphen wollen wir erste geometrische Untersuchungen auf Flächen mit Hilfe der ersten Fundamentalform besprechen. Eigenschaften einer Fläche, die nur von der ersten Fundamentalform abhängen heißen *intrinsisch*.

Wir betrachten also eine parametrisierte Fläche

$$U \ni (u, v) \mapsto \sigma(u, v) \in \mathbb{R}^3$$

mit erster Fundamentalform  $I$  und Koeffizienten  $E, F$  und  $G$ .

**Längenmessung von Kurven auf einer Fläche**


---

*Recap*

---

Die Länge einer Kurve  $(a, b) \ni t \mapsto g(t) \in \mathbb{R}^3$  ist durch

$$\mathcal{L}([a, b]) = \int_a^b |g'(t)| dt$$

gegeben.

---

Sei  $(a, b) \ni t \mapsto \alpha(t) \in \mathbb{R}^3$  eine Kurve auf der Fläche  $\sigma(U)$ , sowie

$$(a, b) \ni t \mapsto \gamma(t) := (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \in \mathbb{R}^2$$

die Kurve im Parameterbereich, sodass

$$\alpha(t) = \sigma(\gamma_1(t), \gamma_2(t)).$$

Nach der Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} |\alpha'(t)|^2 &= (\sigma_u \gamma'_1 + \sigma_v \gamma'_2) \cdot (\sigma_u \gamma'_1 + \sigma_v \gamma'_2) \\ &= E\gamma_1'^2 + 2F\gamma_1'\gamma_2' + G\gamma_2'^2 \\ &= I(\gamma', \gamma') \end{aligned}$$

und die Länge der Kurve  $t \mapsto \alpha(t)$  ist somit durch

$$\int_a^b |\alpha'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{E\gamma_1'^2 + 2F\gamma_1'\gamma_2' + G\gamma_2'^2} dt = \int_a^b \sqrt{I(\gamma', \gamma')} dt$$

gegeben.

Vor diesem geometrischen Hintergrund wird die erste Fundamentalform auch *Bogenlängeelement* genannt und als Tensor geschrieben:

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

### Anwendung auf die Parameterlinien

Insbesondere gelten die obigen Überlegungen für die Parameterlinien bestimmt durch die Kurven

$$t \mapsto \gamma(u_0, t) \quad \text{und} \quad t \mapsto \delta(t, v_0) \tag{6}$$

im Parameterbereich, wobei  $(u_0, v_0) \in U$  fixiert ist.

Da  $\gamma'(t) = (0, 1)$  und  $\delta'(t) = (1, 0)$ , sowie

$$I\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = F, \quad I\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = E \quad \text{und} \quad I\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = G,$$

ist die Länge der Parameterlinien durch

$$\begin{aligned} \int \sqrt{I(\gamma', \gamma')} dt &= \int \sqrt{G(u_0, t)} dt, \\ \int \sqrt{I(\delta', \delta')} dt &= \int \sqrt{E(t, v_0)} dt, \end{aligned}$$

sowie der Winkel zwischen den Parameterlinien durch

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

gegeben.

Insbesondere schneiden sich die Parameterlinien im rechten Winkel genau dann wenn  $F = 0$ .

## 2.3 Besondere Parametrisierungen

### Definition 45.

Eine Parametrisierung  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt

- *orthogonal*, falls  $F = 0$ ;
- *konform*, falls  $E = G$  und  $F = 0$ ;
- *isometrisch*, falls  $E = G = 1$  und  $F = 0$ .

Die 'einfachste' Parametrisierung für Kurven war die Parametrisierung nach der Bogenlänge, etwas Analoges gibt es für Flächen nicht. Eine isometrische Parametrisierung wirkt zwar ähnlich, existiert aber nur für sehr spezielle Flächen, die wir später studieren werden. Lokal lassen sich diese Flächen ohne Verzerrung auf die Ebene abbilden.

Das folgende bemerkenswerte Resultat müssen wir aus Zeitgründen leider ohne Beweis formulieren:

### Theorem 46.

Jede Fläche besitzt (lokal) eine konforme Parametrisierung.

### Proposition 47.

Eine Parametrisierung ist konform genau dann wenn sie Winkel erhält.

*Beweis.* siehe Übungen. □

## 2.4 Die zweite Fundamentalform und Hauptkrümmungen

Wir haben schon gesehen, dass eine (reguläre) Fläche in jedem Punkt eine wohldefinierte Tangentialebene besitzt. Somit gibt es für eine Fläche in jedem Punkt auch eine wohldefinierte (*Flächen-*)*Normale*, jene Gerade die orthogonal auf die Tangentialebene in dem zugehörigen Flächenpunkt steht.

Wie schon bei Kurven, wollen wir an Stelle von Flächennormalen mit Einheitsnormalenfeldern arbeiten.

Im Gegensatz zu Kurven, wo es viele Einheitsnormalenfelder gab, gibt es diese Freiheit bei Flächen nicht – in jedem Flächenpunkt gibt es genau zwei gegengleich orientierte Einheitsnormalvektoren. Wir legen eine Orientierung fest und machen die folgende Definition:

### Definition 48.

Sei  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche, dann heißt das Einheitsnormalenfeld

$$N : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{|\sigma_u \times \sigma_v|}(u, v)$$

die Gauß-Abbildung von  $\sigma$ .

**Bemerkung 49.**

Die Gauß-Abbildung ist eine geometrische Größe, jedoch im Allgemeinen nicht invariant unter Umparametrisierungen der Fläche: sei  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$  eine Fläche mit Gauß-Abbildung  $(u, v) \mapsto N(u, v)$ , dann gilt für

Euklidische Bewegungen: die Gauß-Abbildung  $\hat{N}$  von

$$(u, v) \mapsto \hat{\sigma}(u, v) := A\sigma(u, v) + c, \quad A \in SO(3) \text{ und } c \in \mathbb{R}^3,$$

ist durch

$$\hat{N} = \frac{A\sigma_u \times A\sigma_v}{|A\sigma_u \times A\sigma_v|} = AN$$

gegeben. Die Gauß-Abbildung rotiert also mit der Fläche.

Umparametrisierungen der Fläche: Umparametrisierungen der Fläche können die Orientierung der Gauß-Abbildung verändern. Dies ist zum Beispiel der Fall für die Umparametrisierung  $(\tilde{u}, v) \mapsto \tilde{\sigma}(\tilde{u}, v) := \sigma(-u, v)$ , denn die Gauß-Abbildung  $\tilde{N}$  wird zu

$$\tilde{N} = \frac{\sigma_{\tilde{u}} \times \sigma_v}{|\sigma_{\tilde{u}} \times \sigma_v|}(\tilde{u}, v) = -\frac{\sigma_u \times \sigma_v}{|\sigma_u \times \sigma_v|}(u, v) = -N.$$

Jede Kurve auf einer Fläche 'erbt' nun ein spezielles Einheitsnormalenfeld von der Fläche, bestehend aus der eingeschränkten Gauß-Abbildung:

**Korollar and Definition 50.**

Sei  $t \mapsto \gamma(t)$  eine Kurve im Parameterbereich  $U$ . Dann liefert  $t \mapsto N(\gamma(t))$  ein wohldefiniertes Einheitsnormalenfeld für die Kurve  $t \mapsto \sigma(\gamma(t))$  und induziert daher einen Rahmen für  $\gamma$ ; dieser wird *natürlicher Rahmen* (auch *Darboux-Rahmen*) von  $t \mapsto \sigma(\gamma(t))$  genannt.

*Beweis.* siehe Übungen. □

Wir halten noch eine für später wichtige Eigenschaft der Gauß-Abbildung fest:

**Korollar 51.**

Die Ableitung der Gauß-Abbildung liegt punktweise im Tangentialraum der Fläche, d. h. für alle  $(u, v) \in U$  gilt

$$d_{(u,v)}N : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{(u,v)}\sigma.$$

*Beweis.* Da  $|N|^2 \equiv 1$ , folgt

$$0 = d(|N|^2) = 2N \cdot dN$$



und somit stehen  $N$  und  $dN$  orthogonal, also  $d_{(u,v)}N : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{(u,v)}\sigma$ .  $\square$

**Ziel:** wie in der Kurventheorie, möchten wir die Krümmungen der Fläche durch die Veränderung der Flächennormalen beschreiben.

**Strategie:** definiere eine Abbildung  $S$ , die die Veränderung der Gauß-Abbildung bezüglich der Tangentialrichtungen beschreibt:  $dN = -S \circ d\sigma$ . Diese Abbildung werden wir dann zur Beschreibung und Berechnung der Krümmungen auf einer Fläche verwenden.

**Proposition and Definition 52.**

Sei  $U \ni (u, v) \mapsto \sigma(u, v) \in \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche, dann definiert

$$S|_{(u,v)} := -d_{(u,v)}N \circ (d_{(u,v)}\sigma)^{-1}$$

für jedes  $(u, v) \in U$  einen Endomorphismus auf  $T_{(u,v)}\sigma$ .

Die Abbildung  $(u, v) \mapsto S(u, v)$  heißt *Weingartenabbildung* oder *Form-Operator*.

*Beweis.* (1) Existenz der Umkehrabbildung von  $d\sigma$ :

Da  $d_{(u,v)}\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  injektiv ist, ist die Einschränkung  $d_{(u,v)}\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{(u,v)}\sigma \subset \mathbb{R}^3$  ein Isomorphismus und die Umkehrabbildung existiert.

(2) Wohldefiniertheit der Verknüpfung

Da nach Korollar 51

$$\begin{aligned} d_{(u,v)}N &: \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{(u,v)}\sigma, \\ d_{(u,v)}\sigma &: \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{(u,v)}\sigma, \end{aligned}$$

ist die Verknüpfung wohldefiniert.

(3)  $S|_{(u,v)}$  ist Endomorphismus

Da  $(d_{(u,v)}\sigma)^{-1}$  und  $d_{(u,v)}N$  jeweils linear sind, ist auch die Verknüpfung eine lineare Abbildung.  $\square$

**Koordinatendarstellung der Weingarten-Abbildung:** da  $\sigma_u(u, v)$  und  $\sigma_v(u, v)$  eine Basis der Tangentialebene  $T_{(u,v)}\sigma$  bilden, wird die Weingarten-Abbildung im Punkt  $(u, v)$  eindeutig durch

$$\begin{aligned} S(\sigma_u) &= S(d\sigma\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)) = -dN\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = -N_u, \\ S(\sigma_v) &= S(d\sigma\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)) = -dN\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = -N_v \end{aligned}$$

bestimmt.

**Lemma 53.**

$S|_{(u,v)}$  ist symmetrisch für alle  $(u, v) \in U$ .

*Beweis.* Wir zeigen die Symmetrie bezüglich der Basis  $\{\sigma_u(u, v), \sigma_v(u, v)\}$ : da  $0 = \sigma_u \cdot N = \sigma_v \cdot N$ , folgt

$$\begin{aligned} 0 &= (\sigma_u \cdot N)_v = \sigma_{uv} \cdot N + \sigma_u \cdot N_v = \sigma_{uv} \cdot N - \sigma_u \cdot S(\sigma_v), \\ 0 &= (\sigma_v \cdot N)_u = \sigma_{uv} \cdot N + \sigma_v \cdot N_u = \sigma_{uv} \cdot N - \sigma_v \cdot S(\sigma_u) \end{aligned}$$

und daher

$$\sigma_u \cdot S(\sigma_v) = S(\sigma_u) \cdot \sigma_v.$$

□

---

*Recap*

---

*Eigenwerte und Eigenvektoren:*

$\lambda \in \mathbb{R}$  heißt Eigenwert von  $h \in \text{End}(V, V)$ , wobei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, falls ein  $v \in V \setminus \{0\}$  existiert, sodass

$$h(v) = \lambda v.$$

Der Vektor  $v$  heißt dann Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$ .

---

**Definition 54.**

Die Eigenwerte  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  der Weingarten-Abbildung heißen die *Hauptkrümmungen* der Fläche und die dazugehörigen Eigenrichtungen die *Hauptkrümmungsrichtungen*.

---

*Recap*

---

*Wie berechnet man Eigenwerte und Eigenvektoren eines symmetrischen Endomorphismus  $S$ ?*

- finde die Darstellungsmatrix  $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  von  $S$
- berechne das charakteristische Polynom

$$\chi_A(\mu) := \det \begin{pmatrix} a_{11} - \mu & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \mu \end{pmatrix}$$

- die Nullstellen von  $\chi_A(\mu)$  sind die Eigenwerte von  $A$

- sei  $\lambda_i$  ein Eigenwert, dann ist der dazugehörige Eigenvektor  $v_i$  Lösung des Gleichungssystems

$$(A - \lambda_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})v_i = 0$$

Ein hilfreiches Mittel zur Bestimmung der Darstellungsmatrix der Weingarten-Abbildung ist die zweite Fundamentalform einer Fläche, die, anders als die erste Fundamentalform, Informationen über die Hauptkrümmungen 'kodiert' hat.

**Definition 55.**

Sei  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$  eine parametrisierte Fläche, dann heißt

$$\mathbb{II} := -d\sigma \cdot dN$$

die *zweite Fundamentalform* von  $\sigma$  und die Funktionen

$$e := -\sigma_u \cdot N_u, \quad f := -\sigma_u \cdot N_v \quad \text{und} \quad g := -\sigma_v \cdot N_v$$

werden *Koeffizienten der zweiten Fundamentalform* genannt.

**Bemerkung 56.**

Differenzieren der Gleichungen  $0 = \sigma_u \cdot N$  und  $0 = \sigma_v \cdot N$  ergibt

$$\begin{aligned} e &= -\sigma_u \cdot N_u = \sigma_{uu} \cdot N, \\ f &= -\sigma_u \cdot N_v = -\sigma_v \cdot N_u, \\ g &= -\sigma_v \cdot N_v = \sigma_{vv} \cdot N. \end{aligned}$$

Die zweite Fundamentalform  $\mathbb{II}$  wird durch ihre Koeffizienten beschrieben: seien  $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{II}_{(u_0, v_0)}(w, v) &= -d_{(u_0, v_0)}\sigma(w) \cdot d_{(u_0, v_0)}N(v) \\ &= \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} e(u_0, v_0) & f(u_0, v_0) \\ f(u_0, v_0) & g(u_0, v_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die **Darstellungsmatrix der Weingarten-Abbildung** mit Hilfe der Koeffizienten von I und II: da  $\sigma_u$  und  $\sigma_v$  eine Basis des Tangentialraumes bilden, gilt

$$\begin{aligned} S(\sigma_u) &= -N_u = a_{11}\sigma_u + a_{21}\sigma_v, \\ S(\sigma_v) &= -N_v = a_{12}\sigma_u + a_{22}\sigma_v. \end{aligned}$$

Skalarmultiplikation mit  $\sigma_u$  und  $\sigma_v$  ergibt

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

und die Darstellungsmatrix der Weingarten-Abbildung ist somit gegeben durch

$$A = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Ge - Ff & Gf - Fg \\ Ef - Fe & Eg - Ff \end{pmatrix}.$$

**Ausblick:** nach der vielleicht etwas technischen und abstrakten Definition der Hauptkrümmungen, möchten wir nun noch eine weitere geometrische Interpretation der Hauptkrümmungen diskutieren. Dazu werden wir die Hauptkrümmungen mit der Normalkrümmung von Kurven auf der Fläche in Verbindung bringen.

**Proposition 57.**

Sei  $t \mapsto \alpha(t) = \sigma(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  eine Kurve auf der parametrisierten Fläche  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$ . Die Normalkrümmung der Kurve bezüglich des natürlichen Rahmens ist durch

$$\kappa_n = \frac{\mathbb{II}\left(\begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \end{pmatrix}\right)}{\mathbb{I}\left(\begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \end{pmatrix}\right)}$$

gegeben.

*Beweis.* Aus den Bewegungsgleichungen wissen wir, dass

$$\kappa_n = \frac{1}{|\alpha'|} T' \cdot N = \frac{1}{|\alpha'|^2} \alpha'' \cdot N = -\frac{\alpha' \cdot N'}{\alpha' \cdot \alpha'},$$

daher folgt mit Hilfe der Kettenregel

$$\kappa_n = -\frac{d\sigma\left(\begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \end{pmatrix}\right) \cdot dN\left(\begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \end{pmatrix}\right)}{d\sigma\left(\begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \end{pmatrix}\right) \cdot d\sigma\left(\begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \end{pmatrix}\right)} = \frac{\mathbb{II}\left(\begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \end{pmatrix}\right)}{\mathbb{I}\left(\begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \end{pmatrix}\right)}.$$

□

Nach dieser Proposition hängt die Normalkrümmung  $\kappa_n$  somit nur von der Tangentialrichtung und nicht von der Kurve  $t \mapsto \alpha(t)$  ab. Als Folgerung erhalten wir den folgenden Satz und eine Definition der Normalkrümmung, die keine Wahl der Kurve verlangt:

**Theorem 58** (Meusnier).

Zwei Kurven auf einer Fläche  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$  die durch den Flächenpunkt  $\sigma(u_0, v_0)$  gehen und an dieser Stelle die selbe Tangente besitzen, haben an diesem Punkt die gleiche Normalkrümmung.

**Definition 59.**

Sei  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$  eine parametrisierte Fläche,  $\sigma(u_0, v_0) = p$  ein Flächenpunkt und  $\xi \in T_{(u_0, v_0)}\sigma$  eine Tangentialrichtung, dann nennen wir

$$\kappa_n = \frac{\mathbb{II}(\xi, \xi)}{\mathbb{I}(\xi, \xi)}$$

die *Normalkrümmung von  $\sigma$  in  $p$  in Richtung  $\xi$* .

Somit kann man von einem fixen Flächenpunkt aus in 'jede Richtung der Fläche' die Normalkrümmung berechnen. Das folgende Theorem zeigt, wie man diese Normalkrümmungen aus den beiden Hauptkrümmungen berechnen kann:

**Theorem 60** (Satz von Euler).

Seien  $e_1$  und  $e_2$  die Hauptkrümmungsrichtungen zu den Hauptkrümmungen  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$ , dann ist die Normalkrümmung  $\kappa_n$  in Richtung

$$e_\varphi := (\cos \varphi)e_1 + (\sin \varphi)e_2$$

durch

$$\kappa_n(e_\varphi) = \kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi$$

gegeben.

*Beweis.* später □

Dieser Zusammenhang zwischen Normal- und Hauptkrümmungen liefert eine geometrische Charakterisierung der beiden Hauptkrümmungen:

**Korollar 61.**

Die Hauptkrümmungen  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  sind in jedem Flächenpunkt  $p$  das Maximum bzw. Minimum der Normalkrümmungen in  $p$ .

*Beweis.* OBdA nehmen wir an, dass  $\kappa_1 \geq \kappa_2$  gilt. Dann folgt mit dem Satz von Euler für alle Richtungen  $e_\varphi$ , dass

$$\begin{aligned}\kappa_n(e_\varphi) &= \kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi = (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)\kappa_2 + \cos^2 \varphi(\kappa_1 - \kappa_2) \geq \kappa_2 \\ \kappa_n(e_\varphi) &= \kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi = (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)\kappa_1 + \sin^2 \varphi(\kappa_2 - \kappa_1) \leq \kappa_1.\end{aligned}$$

□

## 2.5 Spezielle Flächenpunkte & weitere Krümmungsbegriffe

### Definition 62.

Ein Flächenpunkt  $f(u, v)$  einer Fläche  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt

- *Nabelpunkt*, falls  $\kappa_1 = \kappa_2$ ,
- *Flachpunkt*, falls  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ .

### Bemerkung 63.

Nach dem Satz von Euler ist die Normalkrümmung in einem Nabelpunkt in jede Richtung gleich.

### Beispiel 64.

(i) Ein Ebenenstück besteht aus Flachpunkten: angenommen  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v) \in \mathcal{E}$ , wobei

$$\mathcal{E} := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot n \equiv d\} \quad \text{für } d \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

dann ist die Gauss-Abbildung  $N \equiv n$  konstant und somit  $dN = 0$ . Somit verschwindet die Weingarten-Abbildung  $S \equiv 0$  und wir erhalten  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ .

(ii) Ein spärisches Flächenstück besteht aus Nabelpunkten.

### Definition 65.

Sei  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche, dann beschreiben die Funktionen

$$H := \frac{1}{2} \operatorname{tr} S = \frac{1}{2} (\kappa_1 + \kappa_2)$$

$$K := \det S = \kappa_1 \kappa_2$$

die *mittlere Krümmung* und die *Gauß-Krümmung* der Fläche.

Bekannte Flächenklassen von denen wir einige später studieren werden:

- Minimalflächen  $\Leftrightarrow H \equiv 0$ ,
- CMC-Flächen (constant mean curvature surfaces)  $\Leftrightarrow H \equiv \text{const} \neq 0$ ,
- abwickelbare Flächen  $\Leftrightarrow K \equiv 0$ ,
- pseudospärische Flächen  $\Leftrightarrow K \equiv -1$ ,
- sphärische Flächen  $\Leftrightarrow K \equiv 1$ .

## 2.6 Krümmungslinienparametrisierung von Flächen

### Definition 66.

Eine Kurve  $t \mapsto \sigma(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  auf der Fläche  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$  heißt *Krümmungslinie*, falls die Torsion bezüglich des natürlichen Rahmens verschwindet,  $\tau \equiv 0$ .

---

Recap

---

Was bedeutet  $\tau \equiv 0$  bezüglich des Rahmens  $(T, N, B)$  geometrisch?

$$\begin{aligned}\tau \equiv 0 &\Leftrightarrow (T, N, B) \text{ ist ein paralleler Rahmen} \\ &\Leftrightarrow N \text{ ist ein paralleles Einheitsnormalenfeld} \\ &\Leftrightarrow \nabla^\perp N := N' - (N' \cdot T)T \equiv 0.\end{aligned}$$

---

**Proposition 67.**

Eine Kurve  $t \mapsto \sigma(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  ist Krümmungslinie genau dann wenn Rodriguez' Gleichungen

$$0 = (dN + \kappa_n d\sigma) \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \end{pmatrix}$$

erfüllt sind.

*Beweis.* Nach der Definition von  $\nabla^\perp$  und den Bewegungsgleichungen gilt

$$\nabla^\perp(N(\gamma_1, \gamma_2)) = (N_u \gamma'_1 + N_v \gamma'_2) + (\sigma_u \gamma'_1 + \sigma_v \gamma'_2) \kappa_n.$$

Somit ist  $N(\gamma_1, \gamma_2)$  ein paralleles Normalenfeld entlang  $t \mapsto \sigma(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  genau dann wenn Rodriguez' Gleichungen erfüllt sind.  $\square$

**Proposition 68.**

Eine Kurve  $t \mapsto \sigma(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  ist Krümmungslinie auf der Fläche  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$  genau dann wenn  $d\sigma \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \end{pmatrix}$  Hauptkrümmungsrichtung in jedem Kurvenpunkt ist.

*Beweis.* Nach der Definition der Weingarten-Abbildung gilt

$$(dN + \kappa_n d\sigma) \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \end{pmatrix} = (-S + \kappa_n id) d\sigma \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \end{pmatrix}.$$

Daher sind Rodriguez-Gleichungen und somit  $t \mapsto \sigma(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  eine Krümmungslinie genau dann wenn  $d\sigma \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \end{pmatrix}$  ein Eigenwert von  $S$  ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn  $d\sigma \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \end{pmatrix}$  eine Hauptkrümmungsrichtung beschreibt.  $\square$

**Definition 69.**

Eine Parametrisierung  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$  heißt *Krümmungslinienparametrisierung*, wenn alle Parameterlinien Krümmungslinien sind.

**Theorem 70.**

Jede Fläche ohne Nabelpunkte besitzt lokal eine Krümmungslinienparametrisierung.

## 2.7 Hauptsatz für Flächen

**Frage:** Welche Daten muss man vorschreiben um eine Fläche eindeutig zu bestimmen?

**Hilfsmittel:** Christoffelsymbole, Gauss- und Codazzi-Gleichungen

Sei  $\sigma : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche. Da  $\sigma$  nach unserer generellen Voraussetzung regulär parametrisiert ist, bilden  $\sigma_u, \sigma_v$  und  $N$  punktweise eine Basis von  $\mathbb{R}^3$  und die zweiten Ableitungen von  $\sigma$  lassen sich als eindeutige Linearkombinationen schreiben; wir erhalten zum Beispiel

$$\sigma_{uu} = \lambda_1 \sigma_u + \lambda_2 \sigma_v + \lambda_3 N,$$

wobei  $\lambda_3 = e$ , da nach Multiplikation mit  $N$  folgt

$$\lambda_3 = \sigma_{uu} \cdot N = -\sigma_u \cdot N_u = e.$$

Die Koeffizienten der Linearkombination werden nach dem Mathematiker E. B. Christoffel benannt:

**Definition 71.**

Die Funktionen  $\Gamma_{ij}^k$  definiert durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sigma_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \sigma_u + \Gamma_{11}^2 \sigma_v + eN \\ \sigma_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \sigma_u + \Gamma_{12}^2 \sigma_v + fN \\ \sigma_{vu} &= \Gamma_{21}^1 \sigma_u + \Gamma_{21}^2 \sigma_v + fN \\ \sigma_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \sigma_u + \Gamma_{22}^2 \sigma_v + gN \end{aligned} \tag{7}$$

heißen *Christoffelsymbole*.

Da  $\sigma_{uv} = \sigma_{vu}$ , gilt

**Lemma 72.**

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 \text{ und } \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2.$$

Wir wollen nun - aus Sicht der Definition doch etwas überraschend - zeigen, dass die Christoffelsymbole nur aus den Koeffizienten der ersten Fundamentalförmel berechnet werden können:

**Lemma 73.**

Die Christoffelsymbole sind durch die Gleichungen

$$\begin{cases} E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2}E_u \\ F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = F_u - \frac{1}{2}E_v \end{cases} \tag{8}$$



$$\begin{cases} E\Gamma_{12}^1 + F\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}E_v \\ F\Gamma_{12}^1 + G\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}G_u \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2 &= F_v - \frac{1}{2}G_u \\ F\Gamma_{22}^1 + G\Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2}G_v \end{cases} \quad (10)$$

eindeutig bestimmt und hängen somit nur von den Koeffizienten der ersten Fundamentalform  $I$  ab.

*Beweis.* Die angegebenen Gleichungen erhält man durch Multiplikation der Gleichungen (7) mit  $\sigma_u$  und  $\sigma_v$ :

$$\begin{aligned} E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 &= \sigma_{uu} \cdot \sigma_u = \frac{1}{2}(\sigma_u \cdot \sigma_u)_u = \frac{1}{2}E_u, \\ F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 &= \sigma_{uv} \cdot \sigma_v = (\sigma_u \cdot \sigma_v)_u - (\sigma_u \cdot \sigma_{uv}) = F_u - \frac{1}{2}E_v. \end{aligned}$$

Analog erhalten wir die beiden anderen Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} E\Gamma_{12}^1 + F\Gamma_{12}^2 &= \sigma_{uv} \cdot \sigma_u = \frac{1}{2}E_v, \\ F\Gamma_{12}^1 + G\Gamma_{12}^2 &= \sigma_{uv} \cdot \sigma_v = \frac{1}{2}G_u, \\ E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2 &= \sigma_{vv} \cdot \sigma_u = F_v - \frac{1}{2}G_u, \\ F\Gamma_{22}^1 + G\Gamma_{22}^2 &= \sigma_{vv} \cdot \sigma_v = \frac{1}{2}G_v. \end{aligned}$$

Weiters bemerken wir, dass die drei Gleichungssysteme (8), (9) and (10) eindeutig lösbar sind genau dann wenn die Determinante  $EG - F^2 \neq 0$ .

Dies ist aber der Fall: bezeichnen wir den Winkel zwischen  $\sigma_u$  und  $\sigma_v$  mit  $\theta$ , dann gilt

$$EG - F^2 = |\sigma_u|^2|\sigma_v|^2 - \cos^2 \theta |\sigma_u|^2|\sigma_v|^2 = |\sigma_u|^2|\sigma_v|^2 \sin^2 \theta > 0.$$

□

**Proposition 74.**

Eine parametrisierte Fläche  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$  erfüllt die *Gauß-Gleichung*:

$$\begin{aligned} eg - f^2 &= -\frac{1}{2}(E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}) \\ &\quad - E(\Gamma_{11}^1\Gamma_{22}^1 - (\Gamma_{12}^1)^2) - F(\Gamma_{11}^1\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^2) - G(\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2). \end{aligned}$$

*Beweis.* Da  $N \cdot N = 1$ , gilt

$$\begin{aligned} eg - f^2 &= eN \cdot gN - (fN) \cdot (fN) \\ &= (\sigma_{uu} - \Gamma_{11}^1 \sigma_u - \Gamma_{11}^2 \sigma_v) \cdot (\sigma_{vv} - \Gamma_{22}^1 \sigma_u - \Gamma_{22}^2 \sigma_v) \\ &\quad - (\sigma_{uv} - \Gamma_{12}^1 \sigma_u - \Gamma_{21}^2 \sigma_v) \cdot (\sigma_{uv} - \Gamma_{12}^1 \sigma_u - \Gamma_{21}^2 \sigma_v). \end{aligned}$$

Mit den folgenden Beobachtungen, die mit Hilfe der Gleichungen aus dem Beweis von Lemma 73 nachgerechnet werden, folgt die Gültigkeit der Gauß-Gleichung

$$(1) \quad (\Gamma_{11}^1 \sigma_u - \Gamma_{11}^2 \sigma_v) \cdot (\sigma_{vv} - \Gamma_{22}^1 \sigma_u - \Gamma_{22}^2 \sigma_v) = \Gamma_{11}^1 \sigma_u \cdot \sigma_{vv} - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 E - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^2 F + \Gamma_{11}^2 \sigma_v \cdot \sigma_{vv} - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 F - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 G = 0$$

$$(2) \quad (\sigma_{uu} - \Gamma_{11}^1 \sigma_u - \Gamma_{11}^2 \sigma_v) \cdot (\sigma_{vv} - \Gamma_{22}^1 \sigma_u - \Gamma_{22}^2 \sigma_v) = \sigma_{uu} \cdot \sigma_{vv} - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 E - (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1) F - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 G$$

$$(3) \quad (\sigma_{uv} - \Gamma_{12}^1 \sigma_u - \Gamma_{21}^2 \sigma_v) \cdot (\sigma_{uv} - \Gamma_{12}^1 \sigma_u - \Gamma_{21}^2 \sigma_v) = \sigma_{uv} \cdot \sigma_{uv} - (\Gamma_{12}^1)^2 E - 2\Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 F - (\Gamma_{12}^2)^2 G$$

$$(4) \quad \begin{aligned} \sigma_{uu} \cdot \sigma_{vv} - \sigma_{uv} \cdot \sigma_{uv} &= (\sigma_u \cdot \sigma_{vv})_u - (\sigma_u \cdot \sigma_{uv})_v \\ &= \left(F_v - \frac{1}{2}G_u\right)_u - \left(\frac{1}{2}E_v\right)_v = -\frac{1}{2}(E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}). \end{aligned}$$

□

Die Gauß-Gleichung stellt also einen Zusammenhang zwischen der Determinante der zweiten Fundamentalform  $II$  und den Koeffizienten der ersten Fundamentalform her. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, hängt somit auch die Gauß-Krümmung nur von den Koeffizienten der ersten Fundamentalform ab.

Zunächst leiten wir noch weitere Kompatibilitätsbedingungen für den Hauptsatz her.

**Proposition 75.**

Eine parametrisierte Fläche  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$  erfüllt die *Codazzi-Mainardi-Gleichungen*:

$$\begin{aligned} e_v - f_u &= \Gamma_{12}^1 e - (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2) f - \Gamma_{11}^2 g, \\ f_v - g_u &= \Gamma_{22}^1 e - (\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2) f - \Gamma_{12}^2 g. \end{aligned}$$

*Beweis.* Da  $(\sigma_{uu})_v = (\sigma_{uv})_u$ , folgt

$$\begin{aligned} 0 &= (\sigma_{uu})_v \cdot N - (\sigma_{uv})_u \cdot N \\ &= (\Gamma_{11}^1 \sigma_u + \Gamma_{11}^2 \sigma_v + eN)_v \cdot N - (\Gamma_{12}^1 \sigma_u + \Gamma_{12}^2 \sigma_v + fN)_u \cdot N \\ &= \Gamma_{11}^1 \sigma_{uv} \cdot N + \Gamma_{11}^2 \sigma_{vv} \cdot N + e_v - \Gamma_{12}^1 \sigma_{uu} \cdot N - \Gamma_{12}^2 \sigma_{uv} \cdot N + f_v \\ &= \Gamma_{11}^1 f + \Gamma_{11}^2 g + e_v - \Gamma_{12}^1 e - \Gamma_{12}^2 f + f_u. \end{aligned}$$

Analoge Argumente für  $(\sigma_{vv})_u = (\sigma_{uv})_v$  führen zur zweiten Codazzi-Mainardi-Gleichung.  $\square$

Nach den obigen Überlegungen, lassen sich die *Ableitungsgleichungen für Flächen* mit  $\mathcal{F} = (\sigma_u, \sigma_v, N)$  in der folgenden Form schreiben:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_u &= \mathcal{F}\phi, \\ \mathcal{F}_v &= \mathcal{F}\psi, \end{aligned} \tag{11}$$

wobei

$$\phi = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & -a_{11} \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & -a_{21} \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \psi = \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 & -a_{12} \\ \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{22}^2 & -a_{22} \\ f & g & 0 \end{pmatrix}.$$

**Theorem 76.**

Gegeben

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad \text{und} \quad II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

wobei  $I$  positiv definit und  $e, f, g$  skalare Funktionen sind, sodass die Gauß- und die Codazzi-Mainardi-Gleichungen erfüllt sind. Dann existiert lokal eine parametrisierte Fläche  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$  mit  $I$  und  $II$  als erste und zweite Fundamentalform.

Diese Fläche ist bis auf Euklidische Bewegungen eindeutig bestimmt.

*Beweisskizze.* Die Gauß- und Codazzi-Mainardi-Gleichungen sind die Kompatibilitätsbedingungen der Ableitungsgleichungen und garantieren somit lokal eine Lösung  $F$ . Ein ähnliches Vorgehen wie im Beweis des Hauptsatzes für Kurven, liefert nun eine parametrisierte Fläche  $(u, v) \mapsto f(u, v)$  mit  $I$  und  $II$  als Fundamentalformen.

**2.8 Besondere Kurven - Geodätische auf Flächen**

**Ziel:** finde die kürzeste Verbindung auf einer Fläche zwischen zwei gegebenen Flächenpunkten

**Definition 77.**

Eine Kurve  $t \mapsto \alpha(t)$  auf der parametrisierten Fläche  $(u, v) \rightarrow \sigma(u, v)$  heißt *Geodätische*, falls

$$\alpha'' - (\alpha'' \cdot N)N = 0.$$

Aus der Definition folgt sofort, dass  $\alpha''$  orthogonal zur Tangentialebene und parallel zu  $N$  ist:

$$\begin{aligned}\alpha'' \cdot \sigma_u &= (\alpha'' \cdot N)N \cdot \sigma_u = 0 \\ \alpha'' \cdot \sigma_v &= (\alpha'' \cdot N)N \cdot \sigma_v = 0.\end{aligned}$$

**Korollar 78.**

Geodätische werden mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen und ihre geodätische Krümmung  $\kappa_g$  bezüglich des natürlichen Rahmens verschwindet.

*Beweis.* •  $(|\alpha'|^2)' = 2\alpha' \cdot \alpha'' = 2\alpha' \cdot (\alpha'' \cdot N)N = 0$   
 • Für eine Kurve mit  $|\alpha'(t)| \equiv \text{const}$  gilt:

$$\frac{\alpha''}{|\alpha'|^2} = \frac{1}{|\alpha'|} T' = \kappa_n N - \kappa_g B.$$

Da  $\alpha''$  parallel zu  $N$  ist, folgt  $\kappa_g = 0$ . □

**Proposition 79.**

Eine Kurve  $t \mapsto \alpha(t) = \sigma(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  ist Geodätische genau dann wenn

$$\begin{aligned}0 &= \gamma_1'' + \Gamma_{11}^1 \gamma_1'^2 + 2\Gamma_{12}^1 \gamma_1' \gamma_2' + \Gamma_{22}^1 \gamma_2'^2, \\ 0 &= \gamma_2'' + \Gamma_{11}^2 \gamma_1'^2 + 2\Gamma_{12}^2 \gamma_1' \gamma_2' + \Gamma_{22}^2 \gamma_2'^2.\end{aligned}\tag{12}$$

*Beweis.* Strategie: berechne  $\alpha''$  und verwende die Christoffel-Symbole. □

**Bemerkung 80.**

Da die Christoffel-Symbole nur von der ersten Fundamentalform abhängen, gilt dies auch für Geodätische.

**Proposition 81.**

Sei  $p_0 := \sigma(u_0, v_0)$  ein Flächenpunkt und  $\xi_0 \perp N(u_0, v_0)$  eine Tangentialrichtung in  $p_0$ , dann existiert genau eine Geodätische  $t \rightarrow \alpha(t)$  auf  $\sigma(U)$  mit  $\alpha(0) = p_0$  und  $\alpha'(0) = \xi_0$ .

*Beweis.* Strategie: Formuliere (12) mittels  $w := (\gamma_1, \gamma_1', \gamma_2, \gamma_2')$  als System gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form  $w' = \chi(w)$ . Dann existiert zu jedem Anfangswert genau eine Lösung des Anfangswertproblems. □

**Geodätische Polarkoordinaten:** sei  $p_0 := \sigma(u_0, v_0)$  ein Flächenpunkt auf  $\sigma$  und wähle in der Tangentialebene  $T_{p_0}\sigma(U)$  eine Orthonormalbasis  $\{e_1, e_2\}$ . Weiters bezeichne  $t \mapsto \alpha_\theta(t)$  die eindeutige Geodätische mit

$$\alpha_\theta(0) = p_0 \quad \text{und} \quad \alpha'_\theta(0) = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta.$$

Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$ , sodass für  $0 \leq t < \varepsilon$  alle Geodätischen  $\alpha_\theta$  wohldefiniert sind und je zwei Geodätische sich nur im Punkt  $p_0$  schneiden. Diese Geodätischen liefern dann lokal um  $p_0$  eine Parametrisierung mittels  $(0, \varepsilon) \times [0, 2\pi) \ni (t, \theta) \mapsto \alpha_\theta(t)$ . Man beachte aber, dass die Parametrisierung im Flächenpunkt  $p_0$  singularär ist.

**Definition 82.**

Die Parametrisierung  $(0, \varepsilon) \times [0, 2\pi) \ni (t, \theta) \mapsto \alpha_\theta(t)$  heißt *geodätische Polarkoordinaten um  $p_0$* .

**Lemma 83.**

Für geodätische Polarkoordinaten gilt

$$I = dt^2 + Gd\theta^2, \quad \text{wobei } \sqrt{G}|_{t=0} = 0 \quad \text{und} \quad \partial_t(\sqrt{G})|_{t=0} = 1.$$

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen. (keine Details) □

**Korollar 84.**

Geodätische sind lokal die kürzeste Verbindung zwischen zwei Flächenpunkten.

**Bemerkung 85.**

Der Zusatz 'lokal' bedeutet, dass die beiden Flächenpunkte nicht zu weit auseinanderliegen dürfen. Konkret muss für die Korrektheit der Aussage in Korollar 84 gelten: seien  $p_0$  und  $p$  zwei Flächenpunkte, sodass  $p$  in einer Umgebung von  $p_0$  liegt, in der es wohldefinierte geodätische Polarkoordinaten um  $p_0$  gibt.

*Beweis.* Es seien  $(t, \theta) \mapsto \sigma(t, \theta)$  geodätische Polarkoordinaten um den Flächenpunkt  $p_0$  und  $p$  ein weiterer Flächenpunkt in der Umgebung von  $p_0$ , sodass dieser durch die gegebenen Polarkoordinaten beschrieben werden kann, d. h. es existieren  $(\bar{t}, \bar{\theta})$ , sodass  $p = \sigma(\bar{t}, \bar{\theta})$ .

Weiters sei  $s \mapsto \delta(s)$  eine beliebige Kurve auf der Fläche  $\sigma$  mit  $\delta(0) = p_0$  und  $\delta(1) = p$ . Nach Lemma 38 gibt es somit eine Kurve

$$s \mapsto \gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$$

im Parameterbereich, sodass

$$\delta(t) = \sigma(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \quad \text{mit} \quad \gamma(0) = (0, 0) \quad \text{und} \quad \gamma(1) = (\bar{t}, \bar{\theta}).$$

Nach Lemma 83 beträgt die Länge der Kurve  $\delta$  von  $p_0$  nach  $p$ :

$$\int_0^1 |\delta'(s)| ds = \int_0^1 \sqrt{\gamma_1'^2(s) + G\gamma_2'^2(s)} ds \geq \int_0^1 \gamma_1'(s) ds = \bar{t}.$$

Gleichheit gilt somit genau für  $\gamma_2'^2 = 0$  and  $\gamma_1'^2 > 0$ ; das heißt, genau dann wenn wir uns entlang einer geodätischen Koordinatenlinie bewegen.  $\square$

### 3 Im Fokus: die Gauß-Krümmung

---

*Recap*

---

Die Gauß-Krümmung ist definiert als die Determinante der Matrix  $A$  der Weingartenabbildung bzw. als das Produkt der beiden Hauptkrümmungen:

$$K = \det(A) = \kappa_1 \kappa_2.$$


---

Aus der Matrixdarstellung der Weingartenabbildung

$$A = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Ge - Ff & Gf - Fg \\ Ef - Fe & Eg - Ff \end{pmatrix}$$

berechnet sich die Gauß-Krümmung zu

$$\det(A) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Mit Hilfe der Gauß-Gleichung erhalten wir nun eines der bemerkenswertesten Resultate der klassischen Differentialgeometrie:

**Theorem 86** (Theorema Egregium).

Die Gauß-Krümmung ist eine intrinsische Größe, das heißt sie hängt nur von der ersten Fundamentalform einer Fläche ab.

Insbesondere ist die Gauß-Krümmung einer parametrisierten Fläche  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$  durch

$$\begin{aligned} (EG - F^2)K = & -\frac{1}{2}(E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}) - E(\Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 - (\Gamma_{12}^1)^2) \\ & - F(\Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2) - G(\Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2) \end{aligned}$$

gegeben.

**Beispiel 87.**

Die Gauß-Krümmung einer Kugel mit Radius  $r > 0$  hat konstante positive Gauß-Krümmung  $K = \frac{1}{r^2}$ .

**Beispiel 88.**

Die Gauß-Krümmung des Rotationsstorus

$$[0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \ni (u, v) \mapsto \{(c + a \cos v) \cos u, (c + a \cos v) \sin u, a \sin v\}$$

lautet

$$K = \frac{\cos v}{a(c + a \cos v)}.$$

Das heißt entlang der Parameterlinien  $t \mapsto \sigma(t, \pi/2)$  und  $t \mapsto \sigma(t, 3\pi/2)$  verschwindet die Gauß-Krümmung, in dem Bereich  $(u, v) \in [0, 2\pi) \times [\pi/2, 3\pi/2)$  ist die Gauß-Krümmung negativ, sonst positiv.

**Beispiel 89.**

Eine *Regelfläche* ist eine Fläche die aus einer 1-Parameterfamilie von Geraden besteht, das heißt durch jeden Flächenpunkt geht zumindest eine Gerade, die in der Fläche liegt.

Mit einer einfachen geometrischen Überlegung aus der Kurventheorie sehen wir, dass die Gauß-Krümmung einer Regelfläche immer kleiner gleich 0 ist:

---

*Recap*

---

Die Normalkrümmung einer Geraden verschwindet für jeden beliebigen Rahmen.

---

Somit gibt es in jedem Flächenpunkt zumindest eine Richtung, in der die Normalkrümmung der Fläche verschwindet. Da die beiden Hauptkrümmungen die maximale und minimale Normalkrümmung in einem Flächenpunkt liefern, können nur zwei Fälle auftreten:

- zumindest eine der Hauptkrümmungen verschwindet und  $K = 0$ ,
- eine Hauptkrümmung ist positiv, die andere negativ und somit  $K < 0$ .

Eine Regelfläche hat daher in keinem Flächenpunkt positive Gauß-Krümmung.

Dies lässt sich auch rechnerisch schnell überprüfen: eine Regelfläche ist durch folgende Parameterdarstellung gegeben

$$\sigma(t, v) = \chi_1(t) + v\chi_2(t),$$

wobei  $t \mapsto \chi_1(t)$  eine Kurve und  $t \mapsto \chi_2(t)$  eine 1-Parameterfamilie von Richtungen ist.

Da  $\sigma_{vv} = 0$ , ist  $g \equiv 0$  und somit folgt für die Gauß-Krümmung:

$$K = \frac{-f^2}{EG - F^2} \leq 0. \tag{13}$$

**Beispiel 90.**

Ein einschaliges Hyperboloid

$$(u, v) \mapsto (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, c \sinh v), \quad a, c \in \mathbb{R}^+$$

hat negative Gauß-Krümmung.

Es können also die unterschiedlichsten Eigenschaften für die Gauß-Krümmung auf einer Fläche auftauchen. Eine besondere Stellung nehmen Flächen mit konstanter Gauß-Krümmung ein, die wir in den folgenden Abschnitten näher untersuchen und charakterisieren werden.



Zunächst möchten wir noch auf folgende Besonderheit eingehen: auf der einen Seite hängt die Gauß-Krümmung nur von der ersten Fundamentalform ab, auf der anderen Seite ist aber nach dem Hauptsatz der Flächentheorie eine Fläche durch die Vorgabe der ersten Fundamentalform im Allgemeinen noch nicht eindeutig bestimmt.

**Frage:** welche Flächen besitzen die gleiche Gauß-Krümmung?

**Definition 91.**

Zwei parametrisierte Flächen(stücke)  $\sigma_1 : U \rightarrow S_1$  und  $\sigma_2 : U \rightarrow S_2$  heißen zueinander *isometrisch*, falls die beiden ersten Fundamentalformen übereinstimmen. Die Abbildung  $\iota : S_1 \rightarrow S_2$  heißt *Isometrie*.

**Beispiel 92.**

Die xz-Ebene

$$(u, v) \mapsto \sigma_1(u, v) := (u, 0, v) \quad (14)$$

und der Zylinder

$$(u, v) \mapsto \sigma_2(u, v) := (\cos u, \sin u, v) \quad (15)$$

sind isometrisch, da die erste Fundamentalform jeweils durch  $I = du^2 + dv^2$  gegeben ist. Die Isometrie zwischen diesen beiden Flächen lautet

$$\iota(u, 0, v) = (\cos u, \sin u, v). \quad (16)$$

Da sowohl die Längenmessung einer Kurve auf einer Fläche, als auch eine Geodätische nur von der ersten Fundamentalform einer Fläche abhängt, folgt:

**Korollar 93.**

- (i) Die Länge von Kurven auf einer Fläche ist invariant unter Isometrien.
- (ii) Geodätische werden durch eine Isometrie wieder auf Geodätische abgebildet.
- (iii) Geodätische Polarkoordinaten werden durch eine Isometrie lokal wieder auf geodätische Polarkoordinaten abgebildet.

Weiters folgt nach dem Theorema Egregium:

**Korollar 94.**

Die Gauß-Krümmung von zwei isometrischen Flächenstücken ist gleich.

Für Flächen mit konstanter Gauß-Krümmung gilt auch die Umkehrung:

**Theorem 95** (Minding's Theorem).

Besitzen zwei Flächen die gleiche konstante Gauß-Krümmung, dann sind sie lokal isometrisch, d. h. es existieren lokal Parametrisierungen, sodass die beiden ersten Fundamentalformen übereinstimmen.

*Beweis.* Strategie: wir zeigen, dass für konstante Gauß-Krümmung  $K$  die Koeffizienten der ersten Fundamentalform für geodätische Polarkoordinaten nur von  $K$  abhängen;

Ist ein Flächenstück mittels geodätischen Polarkoordinaten  $(r, \theta)$  parametrisiert, dann gilt

$$I = dr^2 + Gd\theta^2, \quad \text{wobei } \sqrt{G}|_{r=0} = 0, \quad \partial_r(\sqrt{G})|_{r=0} = 1. \quad (17)$$

Aus der Gauß-Gleichung und den Christoffelsymbolen erhalten wir

$$K\sqrt{G} + (\sqrt{G})_{rr} = 0. \quad (18)$$

Ist nun die Gauß-Krümmung  $K$  konstant, so wird  $\sqrt{G}$  eindeutig durch (18) und die Anfangswerte (17) bestimmt:

(i)  $K = 0$  : Die allgemeine Lösung von  $(\sqrt{G})_{rr} = 0$  ist gegeben durch

$$\sqrt{G(r, \theta)} = r\chi_1(\theta) + \chi_2(\theta).$$

Aus den Anfangsbedingungen folgt  $\sqrt{G}(r, \theta) = r$ .

(ii)  $K = \lambda^2 > 0$  : Die allgemeine Lösung von  $\lambda^2\sqrt{G} + (\sqrt{G})_{rr} = 0$  lautet

$$\sqrt{G(r, \theta)} = \chi_1(\theta) \sin \lambda r + \chi_2(\theta) \cos \lambda r. \quad (19)$$

Um die Anfangsbedingungen zu erfüllen gilt

$$\sqrt{G} = \frac{1}{\lambda^2} \sin \lambda r \quad (20)$$

und somit  $G = \frac{1}{K} \sin^2 \sqrt{K}r$ .

(iii)  $K = -\lambda^2 < 0$  : Die allgemeine Lösung von  $-\lambda^2\sqrt{G} + (\sqrt{G})_{rr} = 0$  lautet

$$\sqrt{G(r, \theta)} = \chi_1(\theta) \sinh \lambda r + \chi_2(\theta) \cosh \lambda r. \quad (21)$$

Aus den Anfangswerten folgt somit

$$\sqrt{G(r, \theta)} = -\frac{1}{K} \sinh^2 \sqrt{-K}r. \quad (22)$$

Die Koeffizienten der ersten Fundamentalform hängen also nur von  $K$  ab.  $\square$

### 3.1 Abwickelbare Flächen, $K \equiv 0$

#### Definition 96.

Eine Fläche wird *abwickelbar* (auch *Torse* oder *flach*) genannt, falls die Gauß-Krümmung auf der ganzen Fläche verschwindet.

Eine parametrisierte Fläche  $U \ni (u, v) \mapsto \sigma(u, v)$  heißt *regulär abwickelbar*, falls  $(u, v)$  wohldefinierte Krümmungslinien sind und eine der Hauptkrümmungen verschwindet, d.h. für  $i = 1$  oder  $i = 2$  gilt  $\kappa_i \equiv 0$  auf ganz  $\sigma(U)$ .

Insbesondere wenn wir Singularitäten und Nabelpunkte zulassen, sind diese beiden Begriffe nicht äquivalent; in der Literatur finden sich zahlreiche Arbeiten die den Unterschied thematisieren (siehe zB Wallner, Ruled surfaces and developable surfaces oder Hartman und Nirenberg, On spherical image maps whose Jacobians do not change sign, 1959).

Da eine Ebene offensichtlich verschwindende Gauß-Krümmung besitzt, folgt nach dem Theorem von Minding, dass jede abwickelbare Fläche lokal isometrisch zur Ebene ist. Somit kann eine abwickelbare Fläche aus einem Stück Papier ohne Stauchung und Verzerrung erzeugt werden.

**Ziel:** Klassifikation regulär abwickelbarer Flächenstücke ohne Flachpunkte

Sei also  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$  eine regulär abwickelbare Fläche, die mittels Krümmungslinien parametrisiert ist und oBdA die Bedingung  $\kappa_2 \equiv 0$  erfüllt. Da sich für allgemeine Krümmungslinien die Codazzi-Gleichung zu

$$0 = (\kappa_2)_u - \frac{G_u}{2G}(\kappa_1 - \kappa_2) \quad (23)$$

vereinfacht, gilt für unseren Fall  $0 = G_u$ . Der Koeffizient  $G$  hängt also nur von  $v$  ab:  $G = G(v)$ . Es gibt daher eine Krümmungslinienparametrisierung sodass die Fundamentalformen von folgender Form sind:

$$I = Edu^2 + dv^2 \quad \text{und} \quad II = \kappa_1 Edu^2. \quad (24)$$

Für die Christoffelsymbole  $\Gamma_{22}^1$  und  $\Gamma_{22}^2$  erhalten wir mit Hilfe von

$$\begin{aligned} E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2 &= F_v - \frac{1}{2}G_u, \\ F\Gamma_{22}^1 + G\Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2}G_v, \end{aligned}$$

dass  $\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0$ . Da somit

$$\sigma_{vv} = \sigma_u \Gamma_{22}^1 + \sigma_v \Gamma_{22}^2 + Ng = 0, \quad (25)$$

ist die betrachtete regulär abwickelbare Fläche von der Form

$$\sigma(u, v) = \chi_1(u) + \chi_2(u)v \quad (26)$$

und daher eine Regelfläche. Zusammengefasst:

**Proposition 97.**

Eine regulär abwickelbare Fläche ohne Nabelpunkte ist eine Regelfläche.

Achtung, es ist jedoch nicht jede Regelfläche abwickelbar. Das Helikoid liefert ein Gegenbeispiel! Wir werden beweisen:

**Theorem 98.**

Eine Regelfläche ist regulär abwickelbar genau dann wenn sie lokal einem der folgenden Flächentypen entspricht:

- *Tangentenfläche* einer Raumkurve  $u \mapsto \chi(u)$ :

$$\sigma(u, v) = \chi(u) + v\chi'(u) \quad (27)$$

- ein *verallgemeinerter Kegel* über einer Kurve  $u \mapsto \chi(u)$ :

$$\sigma(u, v) = p + v\chi(u), \quad (28)$$

wobei  $p \in \mathbb{R}^3$  die Kegelspitze ist

- ein *verallgemeinerter Zylinder* über einer Kurve  $u \mapsto \chi(u)$ :

$$\sigma(u, v) = \chi(u) + vp, \quad (29)$$

wobei  $p \in \mathbb{R}^3$ .

Wir teilen den Beweis in mehrere Schritte und zeigen zuerst:

**Lemma 99.**

Eine Tangentenfläche, ein verallgemeinerter Kegel und ein Zylinder sind abwickelbar, dh  $K \equiv 0$ .

*Beweis.* Die Gauß-Krümmung einer Regelfläche  $(u, v) \mapsto \chi_1(u) + v\chi_2(u)$  ist durch

$$K = \frac{-f^2}{EG - F^2} \quad (30)$$

gegeben und verschwindet daher genau dann wenn  $f = N \cdot \sigma_{uv} = 0$ .

- Tangentenfläche: da  $\sigma_{uv} = \chi''(u)$  und  $N = \frac{v\chi'' \times \chi'}{|v\chi'' \times \chi'|}$ , folgt

$$f = N \cdot \sigma_{uv} = 0. \quad (31)$$

- Kegel:  $N = \frac{v\chi' \times \chi}{|\chi' \times \chi|}$  und daher  $f = 0$ .

- Zylinder: da  $\sigma_{uv} = 0$ , erhalten wir auch in diesem Fall  $f = 0$ . □

Sei umgekehrt  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v) = \chi_1(u) + v\chi_2(u)$  eine Regelfläche mit  $K \equiv 0$ , dann folgt  $f = 0$ . Da

$$\begin{aligned}\sigma_u &= \chi'_1 + v\chi'_2, \\ \sigma_v &= \chi_2, \\ \sigma_{uv} &= \chi'_2,\end{aligned}$$

folgt weiters

$$0 = f = N \cdot \sigma_{uv} = N \cdot \chi'_2, \quad (32)$$

$$0 = N \cdot \sigma_v = N \cdot \chi_2, \quad (33)$$

$$0 = N \cdot \sigma_u = N \cdot (\chi'_1 + v\chi'_2) \quad (34)$$

und differenzieren nach  $v$  ergibt

$$\begin{aligned}N_v \cdot \chi'_2 &= 0, \\ N_v \cdot \chi_2 &= 0, \\ N_v \cdot \chi'_1 &= 0.\end{aligned}$$

Wir unterscheiden drei Fälle:

- (1) falls  $\chi'_1 = 0$  oder  $\chi'_2 = 0$ , erhalten wir einen Kegel oder einen Zylinder;
- (2) falls  $\chi'_1$  parallel zu  $\chi'_2$ , ergibt sich ein Kegel
- (3) sonst gilt  $N_v = 0$ , dh die Normalen entlang jeder Erzeugenden sind parallel und die Tangentialebenen somit konstant. Da die Normale einer Regelfläche durch

$$N = \frac{\chi'_1 \times \chi_2 + v(\chi'_2 \times \chi_2)}{|\dots|} \quad (35)$$

gegeben ist, gilt:  $N_v = 0$  genau dann wenn  $\chi'_1 \times \chi_2 = 0$ . Dies ist der Fall falls  $\chi'_1 = \lambda\chi_2$  und  $\sigma$  somit eine Tangentenfläche ist.

Nachdem wir nun sämtliche abwickelbare Flächen geometrisch beschrieben haben, diskutieren wir noch eine weitere Anwendung von abwickelbaren Flächen.

Klarerweise ergeben die Normalen entlang einer Kurve auf einer beliebigen Fläche eine Regelfläche. Ist diese Regelfläche abwickelbar, so sagt dies etwas über die Geometrie der Kurve auf der Fläche aus:

**Proposition 100.**

Eine Kurve auf einer Fläche ist eine Krümmungslinie genau dann wenn die Flächennormalen entlang der Kurve eine abwickelbare (Regel-)Fläche bilden.

*Beweis.* Sei  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$  eine beliebige Fläche und  $t \mapsto \alpha(t) := \sigma(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  eine Kurve auf der Fläche. Wir interessieren uns für die Fläche

$$(t, v) \mapsto \rho(t, v) := \alpha(t) + vN(\gamma_1(t), \gamma_2(t)). \quad (36)$$

Die Normale  $N^\rho$  von  $\rho$  ist durch

$$N^\rho = \frac{\alpha' \times N}{|\alpha' \times N|} \quad (37)$$

gegeben. Wir wissen bereits, dass eine Regelfläche genau dann abwickelbar ist wenn  $f^\rho = 0$ . Weiters gilt

$$f^\rho = N^\rho \cdot \rho_{tv} = \frac{1}{|\alpha' \times N|} (\alpha' \times N) \cdot N_t = \det(N_t, \alpha', N).$$

Da  $N \perp N_t, \alpha'$ , gilt  $\det(N_t, \alpha', N) = 0$  genau dann wenn

1.Fall:  $N_t = 0$

2.Fall:  $N_t$  und  $\lambda\alpha'$  linear abhängig sind;

Insgesamt folgt also:

$$f^\rho = 0 \Leftrightarrow N_t = \lambda\alpha' \quad (38)$$

für ein passendes  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Das heißt:  $f^\rho = 0$  genau dann wenn die Rodriguez Gleichungen erfüllt sind. Dies ist allerdings der Fall genau dann wenn  $t \mapsto \alpha(t)$  eine Krümmungslinie ist.  $\square$

Somit: ist eine Fläche nach Krümmungslinien parametrisiert, ergeben die Normalen entlang jeder Krümmungslinie abwickelbare Flächen, die sich paarweise orthogonal schneiden.

### 3.2 Asymptoten auf einer Fläche

Beobachtung: Ist die Gauß-Krümmung in einem Flächenpunkt negativ, dann ist eine der Hauptkrümmung  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  positiv und eine negativ. Da die Hauptkrümmungen maximale und minimale Normalkrümmung in einem Flächenpunkt sind, gibt es nach dem Zwischenwertsatz zumindest eine Tangentialrichtung in die die Normalkrümmung verschwindet.

**Definition 101.**

Eine Kurve  $t \mapsto \alpha(t)$  auf einer Fläche heißt *Asymptote* wenn die Normalkrümmung bezüglich des natürlichen Rahmens entlang der Kurve verschwindet,  $\kappa_n = 0$ .

---

*Recap*

---

Die Normalkrümmung  $\kappa_n$  entlang einer Kurve

$$t \mapsto \sigma(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

auf einer Fläche  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$  ist durch

$$\kappa_n = \frac{\text{II}(\gamma', \gamma')}{\text{I}(\gamma', \gamma')},$$

wobei  $\gamma(t) := (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ , gegeben.

---

Aus der Definition der Normalkrümmung, sowie der Matrixdarstellung der zweiten Fundamentalform  $II$  folgt:

**Proposition 102.**

Eine Kurve  $t \mapsto \alpha(t) = \sigma(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  ist eine Asymptote auf der Fläche  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$  genau dann wenn

$$e\gamma_1'^2 + 2f\gamma_1'\gamma_2' + g\gamma_2'^2 = 0. \tag{39}$$

Da Parameterlinien durch  $t \mapsto (t, v_0)$  und  $t \mapsto (u_0, t)$  beschrieben werden, folgt

**Korollar 103.**

Ist eine Fläche  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$  so parametrisiert, dass alle Parameterlinien Asymptoten sind, dann gilt für die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform  $e = g = 0$ .

**Proposition 104.**

Die Existenz einer Asymptote durch einen Flächenpunkt  $p$  hängt von der

Gauß-Krümmung in diesem Punkt ab: falls

$K > 0 \Rightarrow$  es existiert keine Asymptotenrichtung durch  $p$

$K < 0 \Rightarrow$  es gibt zwei Asymptotenrichtungen durch  $p$ .

*Beweis.* Es seien  $e_1$  und  $e_2$  die beiden Hauptkrümmungsrichtungen, dann ist nach dem Satz von Euler die Normalkrümmung  $\kappa_n$  in Richtung

$$e_\varphi = e_1 \cos \varphi + e_2 \sin \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad (40)$$

durch

$$\kappa_n(e_\varphi) = \kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi \quad (41)$$

gegeben.

Eine Richtung  $e_\varphi$  ist also Asymptotenrichtung genau dann wenn  $\kappa_n(e_\varphi) = 0$ .

- Ist  $K > 0$ , dann gilt für alle Richtungen  $e_\varphi$ :  $\kappa_n(e_\varphi) \neq 0$ , da die Hauptkrümmungen beide positiv oder beide negativ sind. Es existieren daher keine Asymptotenrichtungen.
- Ist  $K < 0$ , dann löst

$$\varphi = \pm \arctan \sqrt{-\frac{\kappa_1}{\kappa_2}} \quad (42)$$

die Gleichung  $\kappa_n(e_\varphi) = 0$  und es verlaufen somit zwei Asymptoten durch den Punkt  $p$ .

□

### **Bemerkung 105.**

Verschwindet die Gauß-Krümmung in dem Flächenpunkt  $p$  gibt es zwei Fälle:

- ist  $p$  ein Flachpunkt, d. h.  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ , so verschwindet  $\kappa_n$  in jede Richtung
- ist  $p$  kein Flachpunkt und oBdA  $\kappa_2 = 0$ , dann gibt es genau eine Asymptotenrichtung die mit der Hauptkrümmungsrichtung von  $\kappa_2$  übereinstimmt.

Das heißt, die Erzeugenden einer abwickelbaren Fläche sind gleichzeitig Krümmungslinien und Asymptoten.



**Bemerkung 106.**

Sei  $t \mapsto \alpha(t)$  eine Asymptote, die nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Aus den Bewegungsgleichungen

$$T' = \kappa_n N - \kappa_g B \quad (43)$$

folgt mit  $\kappa_n = 0$ :

$$\alpha'' = -\kappa_g B, \quad (44)$$

also gilt  $\alpha'' \perp B$  und somit spannen  $\alpha'$  und  $\alpha''$  die Tangentialebene auf.

**Beispiel 107.**

Wie wir bereits wissen, ist die Gauß-Krümmung des Katenoids negativ; daher gehen durch jeden Flächenpunkt zwei Asymptoten. Wir wollen nun eine Parametrisierung finden, sodass alle Parameterlinien Asymptoten sind.

Da das Katenoid eine Rotationsfläche ist, ist eine Krümmungslinienparametrisierung durch

$$(u, v) \mapsto (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v) \quad (45)$$

mit zweiter Fundamentalform

$$II = -du^2 + dv^2 \quad (46)$$

gegeben. Eine Kurve  $t \mapsto \sigma(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  ist daher nach Proposition 102 eine Asymptote genau dann wenn

$$\begin{aligned} -\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2 = 0 &\Leftrightarrow (\gamma_1' + \gamma_2')(\gamma_1' - \gamma_2') = 0 \\ &\Leftrightarrow \gamma_1' + \gamma_2' = 0 \quad \text{oder} \quad \gamma_1' - \gamma_2' = 0 \\ &\Leftrightarrow \gamma_1 + \gamma_2 = \lambda \quad \text{oder} \quad \gamma_1 - \gamma_2 = \mu, \end{aligned}$$

wobei  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  Integrationskonstanten sind.

Eine Umparametrisierung  $(u, v) \mapsto (\tilde{u}(u, v), \tilde{v}(u, v))$  des Katenoids, sodass alle Parameterlinien Asymptoten sind, ergibt sich also durch Auflösen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \tilde{u} + \tilde{v} &= \lambda \\ \tilde{u} - \tilde{v} &= \mu. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit die gesuchte Umparametrisierung durch

$$\tilde{u} = \frac{\lambda + \mu}{2} \quad \text{und} \quad \tilde{v} = \frac{\lambda - \mu}{2}$$

und die Parametrisierung eines Katenoids mittels Asymptoten ist durch

$$(\lambda, \mu) \mapsto \left( \cosh \frac{\lambda - \mu}{2} \cos \frac{\lambda + \mu}{2}, \cosh \frac{\lambda - \mu}{2} \sin \frac{\lambda + \mu}{2}, \frac{\lambda - \mu}{2} \right)$$

gegeben.

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf, kann nun lokal für jedes Flächenstück mit negativer Gauß-Krümmung eine Parametrisierung mittels Asymptoten gefunden werden:

**Proposition 108.**

Auf einem Flächenstück mit negativer (nicht notwendigerweise konstanter) Gauß-Krümmung  $K =: -\frac{1}{\rho^2}$  existiert lokal eine Parametrisierung, sodass alle Parameterlinien Asymptoten sind.

Wir werden nun noch untersuchen, welche Form die Fundamentalformen für diese spezielle Parametrisierung haben: dazu machen wir zunächst den folgenden Ansatz und schreiben die Koeffizienten der ersten Fundamentalform als

$$E = \rho^2 \chi_1^2 \quad \text{und} \quad G = \rho^2 \chi_2^2, \quad (47)$$

wobei  $\chi_1$  und  $\chi_2$  passende Funktionen sind. Bezeichne weiters  $\omega$  den Winkel zwischen den Parameterlinien, dann gilt

$$\cos \omega = \frac{\sigma_u \cdot \sigma_v}{|\sigma_u| |\sigma_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}. \quad (48)$$

Nach Korollar 103, gilt außerdem für eine Parametrisierung entlang Asymptoten die Eigenschaft  $e = g = 0$ . Somit folgt mit

$$K = -\frac{1}{\rho^2} = -\frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

dass  $f = \rho \chi_1 \chi_2 \sin \omega$ .

Zusammenfassend sind die Fundamentalformen einer Parametrisierung mittels Asymptoten also durch

$$\text{I} = \rho^2 (\chi_1^2 du^2 + 2\chi_1 \chi_2 \cos \omega dudv + \chi_2^2 dv^2) \quad (49)$$

$$\text{II} = 2\rho \chi_1 \chi_2 \sin \omega dudv, \quad (50)$$

wobei  $K =: -\frac{1}{\rho^2}$  und  $\omega$  den Winkel zwischen den beiden Parameterlinien beschreibt, gegeben.

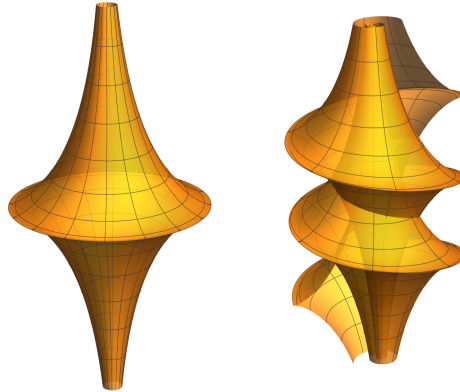
Die Codazzi-Mainardi- und Gauß-Gleichungen lauten für diese Parametrisierung

$$0 = (\chi_1)_v + \frac{1}{2} \frac{\rho_v}{\rho} \chi_1 - \frac{1}{2} \frac{\rho_u}{\rho} \chi_2 \cos \omega, \quad (51)$$

$$0 = (\chi_2)_u + \frac{1}{2} \frac{\rho_u}{\rho} \chi_2 - \frac{1}{2} \frac{\rho_v}{\rho} \chi_1 \cos \omega, \quad (52)$$

$$0 = \omega_{uv} + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_u}{\rho} \frac{\chi_2}{\chi_1} \sin \omega \right)_u + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_v}{\rho} \frac{\chi_1}{\chi_2} \sin \omega \right)_v - \chi_1 \chi_2 \sin \omega. \quad (53)$$

### 3.2.1 Pseudosphärische Flächen, $K \equiv -1$



Wir wollen nun Flächen mit konstanter negativer Gauß-Krümmung untersuchen. Da Skalieren einer Fläche die Geometrie nicht verändert, beschränken wir uns auf den Fall  $K \equiv -1$ .

**Definition 109.**

Eine Fläche mit konstanter negativer Gauß-Krümmung  $K = -1$  heißt *pseudosphärisch*.

Ist  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$  eine pseudosphärische Fläche mit  $K \equiv -1$ , dann existiert eine Parametrisierung mittels Asymptoten mit Fundamentalformen der Form (49) und (50), wobei

$$\rho \equiv 1, \quad \text{da } K = -\frac{1}{\rho^2} \equiv -1. \quad (54)$$

Die Codazzi-Mainardi-Gleichungen zeigen somit, dass

$$(\chi_1)_v = 0 = (\chi_2)_u$$

und daher  $\chi_1 = \chi_1(u)$  und  $\chi_2 = \chi_2(v)$ . Es existiert daher eine Asymptoten erhaltende Umparametrisierung sodass

$$\text{I} = du^2 + 2 \cos \omega \, dudv + dv^2, \quad (55)$$

$$\text{II} = 2 \sin \omega \, dudv. \quad (56)$$

**Definition 110.**

Eine Parametrisierung mit der Eigenschaft  $E = G = 1$ , heißt *Chebyshev-Netz*.

**Theorem 111.**

Eine Fläche ist pseudosphärisch genau dann wenn sie durch ein asymptotisches Chebyshev-Netz parametrisiert werden kann.

*Beweis.* Wie oben gezeigt, kann eine pseudosphärische Fläche durch ein asymptotisches Chebyshev-Netz parametrisiert werden (vgl. (55) und (56)).

Es bleibt also die Umkehrung zu zeigen: sei  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$  ein asymptotisches Chebyshev-Netz, dann gilt

$$\begin{aligned} \text{I} &= du^2 + 2 \cos \omega \, dudv + dv^2, \\ \text{II} &= 2 \sin \omega \, dudv, \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-\sin^2 \omega}{1 - \cos^2 \omega} = -1 \quad (57)$$

□

Ist eine pseudosphärische Fläche so parametrisiert, dass (55) und (56) gelten, dann vereinfacht sich die Gauß-Gleichung (53) zu einer sehr bekannten Gleichung:

**Korollar and Definition 112.**

Die Gauß-Gleichung eines asymptotischen Chebyshev-Netzes wird zur *Sinus-Gordon-Gleichung*

$$\omega_{uv} = \sin \omega. \quad (58)$$

Nach dem Hauptsatz für Flächen gilt auch die Umkehrung, da die Codazzi-Mainardi-Gleichungen trivialerweise erfüllt sind:

**Proposition 113.**

Sei  $\omega = \omega(u, v)$  eine Lösung der Sinus-Gordon-Gleichung, dann definieren

$$\text{I} = du^2 + 2 \cos \omega \, dudv + dv^2, \quad (59)$$

$$\text{II} = 2 \sin \omega \, dudv \quad (60)$$

eine pseudosphärische Fläche.

Aus einem asymptotischen Chebyshev-Netz  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$  gewinnt man leicht eine Krümmungslinienparametrisierung durch die Umparametrisierung

$$(u, v) \mapsto \sigma\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) =: \tilde{\sigma}(u, v). \quad (61)$$

Es gilt

$$\tilde{\text{I}} = \cos^2 \frac{\omega}{2} du^2 + \sin^2 \frac{\omega}{2} dv^2, \quad (62)$$

$$\tilde{\text{II}} = \frac{1}{2} \sin \omega (-du^2 + dv^2) \quad (63)$$

und daher

$$\kappa_1 = -\frac{\sin \omega}{1 + \cos \omega} = -\tan \frac{\omega}{2}$$

$$\kappa_2 = -\frac{\sin \omega}{1 - \cos \omega} = \cot \frac{\omega}{2}$$

Die Gauß-Gleichung bzw die Sinus-Gordon-Gleichung lautet in diesen Krümmungslinienparametern mit  $\theta := \frac{\omega}{2}$

$$\theta_{uu} - \theta_{vv} = \sin \theta \cos \theta.$$

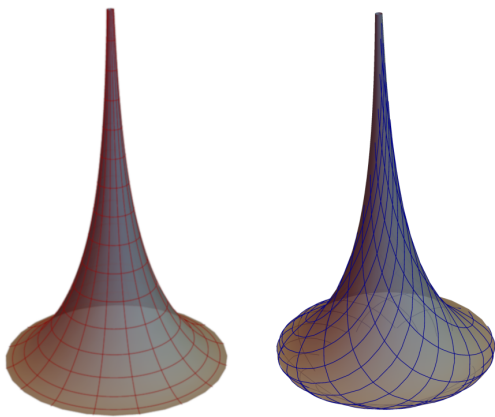
Umgekehrt, liefert die Umparametrisierung  $(u, v) \mapsto \tilde{\sigma}(u + v, u - v)$  einer Krümmungslinienparametrisierung der Form (62) und (63) ein asymptotisches Chebyshev-Netz.

**Proposition and Definition 114.**

Für jede pseudosphärische Fläche existiert ein *Chebyshev-Krümmungsliniennetz*, das ist eine Parametrisierung  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$  sodass

$$\text{I} = \cos^2 \theta du^2 + \sin^2 \theta dv^2,$$

$$\text{II} = \frac{1}{2} \sin 2\theta (-du^2 + dv^2).$$



**Beispiel 115.**  
Pseudosphere

$$(u, v) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\cosh u} \cos v, \\ \frac{1}{\cosh u} \sin v, \\ u - \tanh u \end{array} \right\}.$$

**3.3 Bianchi-Transformation**

**Ziel:** konstruiere aus einer bekannten pseudosphärische Fläche weitere neue pseudosphärische Flächen

**Definition 116.**

Eine Fläche  $\hat{S}$  heißt *Bianchi-Transformierte* der pseudosphärischen Fläche  $S$ , falls es eine Abbildung  $\Phi : S \rightarrow \hat{S}$  zwischen den beiden Flächen gibt, sodass für jeden Flächenpunkt  $p$  gilt

- (B1)  $|\Phi(p) - p| = 1$
- (B2)  $\Phi(p) - p$  liegt in der Tangentialebene von  $S$  bei  $p$
- (B3) Die Normale  $\hat{N}(\Phi(p))$  liegt in der Tangentialebene von  $S$  bei  $p$  und steht orthogonal auf  $\Phi(p) - p$

**Beispiel 117.**

Gerade – Pseudosphäre – Kuen-Fläche

**Proposition 118.**

Sei  $U \ni (u, v) \mapsto \sigma(u, v) \in \mathbb{R}^3$  eine pseudosphärische Fläche parametrisiert durch ein Chebyshev-Krümmungsliniennetz und  $\hat{\sigma} = \Phi \circ \sigma$  eine transformierte Fläche die (B1) und (B2) erfüllt. Dann existiert eine Funktion  $\hat{\theta} : U \rightarrow \mathbb{R}$  sodass

$$\hat{\sigma} = \sigma + \frac{\cos \hat{\theta}}{\cos \theta} \sigma_u + \frac{\sin \hat{\theta}}{\sin \theta} \sigma_v \quad (64)$$

*Beweis.* Nach (B2) liegt  $\Phi(p) - p$  für jeden Flächenpunkt  $p \in S$  in der entsprechenden Tangentialebene die von  $\sigma_u(p)$  und  $\sigma_v(p)$  aufgespannt wird: somit existieren Funktionen  $\lambda_1, \lambda_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$  sodass

$$\hat{\sigma} = \sigma + \lambda_1 \sigma_u + \lambda_2 \sigma_v. \quad (65)$$

Nach (B1) gilt weiters

$$\begin{aligned} 1 &= |\Phi(\sigma) - \sigma|^2 = (\lambda_1 \sigma_u + \lambda_2 \sigma_v) \cdot (\lambda_1 \sigma_u + \lambda_2 \sigma_v) = \lambda_1^2 |\sigma_u|^2 + \lambda_2^2 |\sigma_v|^2 \\ &= \lambda_1^2 \cos^2 \theta + \lambda_2^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Es existiert daher eine Funktion  $\hat{\theta}$  sodass

$$\lambda_1 = \frac{\cos \hat{\theta}}{\cos \theta} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{\sin \hat{\theta}}{\sin \theta}, \quad (66)$$

was somit die Behauptung beweist.  $\square$

**Korollar 119.**

Ist  $\hat{\sigma}$  gegeben durch (64), dann gilt

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_u &= \frac{\cos \theta - \sin \hat{\theta}(\hat{\theta}_u + \theta_v)}{\cos \theta} \sigma_u + \frac{\cos \hat{\theta}(\hat{\theta}_u + \theta_v)}{\sin \theta} \sigma_v - \sin \theta \cos \hat{\theta} N \\ \hat{\sigma}_v &= -\frac{\sin \hat{\theta}(\hat{\theta}_v + \theta_u)}{\cos \theta} \sigma_u + \frac{\sin \theta + \cos \hat{\theta}(\hat{\theta}_v + \theta_u)}{\sin \theta} \sigma_v + \sin \hat{\theta} \cos \theta N. \end{aligned}$$

*Beweis.* Ableiten von (64) gibt

$$\hat{\sigma}_u = \sigma_u + \left(\frac{\cos \hat{\theta}}{\cos \theta}\right)_u \sigma_u + \left(\frac{\cos \hat{\theta}}{\cos \theta}\right) \sigma_{uu} + \left(\frac{\sin \hat{\theta}}{\sin \theta}\right)_u \sigma_v + \frac{\sin \hat{\theta}}{\sin \theta} \sigma_{uv}. \quad (67)$$

Die zweiten Ableitungen können mit Hilfe der Christoffelsymbole ausgedrückt werden,

$$\begin{aligned} \sigma_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \sigma_u + \Gamma_{11}^2 \sigma_v + eN \\ &= -(\tan \theta) \theta_u \sigma_u + (\cot \theta) \theta_v \sigma_v - \sin \theta \cos \theta N, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \sigma_u + \Gamma_{12}^2 \sigma_v \\ &= -(\tan \theta) \theta_v \sigma_u + (\cot \theta) \theta_u \sigma_v. \end{aligned}$$

Analoge Überlegungen führen zum Ausdruck für  $\hat{\sigma}_v$ . □

**Theorem 120.**

Eine parametrisierte Fläche gegeben durch (64) ist Bianchi-Transformierte genau dann wenn die folgenden Gleichungen gelten:

$$\hat{\theta}_u + \theta_v = \sin \hat{\theta} \cos \theta, \quad (68)$$

$$\theta_u + \hat{\theta}_v = -\cos \hat{\theta} \sin \theta. \quad (69)$$

*Beweis.* Angenommen die Fläche  $(u, v) \mapsto \hat{\sigma}(u, v)$  ist eine Bianchi-Transformierte, dann gilt für die Einheitsnormale  $\hat{N}$  von  $\hat{S}$  nach oben und (B3):

$$\hat{N} = A\sigma_u + B\sigma_v \quad \text{und} \quad \hat{N} \cdot (\hat{\sigma} - \sigma) = 0 \quad (70)$$

und daher

$$\hat{N} = -\frac{\sin \hat{\theta}}{\cos \theta} \sigma_u + \frac{\cos \hat{\theta}}{\sin \theta} \sigma_v. \quad (71)$$

Außerdem gilt

$$0 = \hat{N} \cdot \hat{\sigma}_u = \hat{N} \cdot \hat{\sigma}_v \quad (72)$$

und das ist nach Rechnung der Fall wenn (68).

Umgekehrt, angenommen es gelten die Gleichungen (68), dann gilt

$$\hat{\sigma}_u = \cos^2 \hat{\theta} \sigma_u + \cos \hat{\theta} \sin \hat{\theta} \cot \theta \sigma_v - \sin \theta \cos \hat{\theta} N \quad (73)$$

$$\hat{\sigma}_v = \sin \hat{\theta} \cos \hat{\theta} \tan \theta \sigma_u + \sin^2 \hat{\theta} \sigma_v + \sin \hat{\theta} \cos \theta N. \quad (74)$$

Dann gilt

$$\hat{N} := -\frac{\sin \hat{\theta}}{\cos \theta} \sigma_u + \frac{\cos \hat{\theta}}{\sin \theta} \sigma_v \quad (75)$$

ist Einheitsnormale von  $\hat{\sigma}$  und ist orthogonal zu  $\hat{\sigma} - \sigma$ . Daher ist  $\hat{\sigma}$  eine Bianchi-Transformierte von  $\sigma$ . □

**Theorem 121.**

Die Bianchi-Transformierte  $\hat{\sigma}$  ist eine pseudosphärische Fläche und ein Chebyshev-Krümmungsliniennetz.

## 4 Minimalflächen

In diesem Kapitel untersuchen wir Minimalflächen von unterschiedlichen geometrischen Standpunkten aus. Insbesondere möchten wir zeigen, dass die Oberfläche einer Minimalfläche eine spezielle Eigenschaft hat; diese Flächen sind nämlich kritische Punkte des Oberflächenfunktionals.

Dazu diskutieren wir im ersten Abschnitt im Allgemeinen wie man die Oberfläche einer parametrisierten Fläche berechnen kann und wie man Oberflächen von verschiedenen Flächen überhaupt 'vergleichen' kann.

### 4.1 Oberflächenintegral und Normalvariationen

**Ziel:** Berechnung der Oberfläche einer Fläche

**Idee:** wir approximieren die Fläche durch infinitesimal kleine tangentielle Rechtecke und addieren die Flächeninhalte dieser Rechtecke

Sei  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche und  $R \subset U$  ein Rechteck mit gegenüberliegenden Eckpunkten  $(u_0, v_0)$  und  $(u_0 + \delta u_0, v_0 + \delta v_0)$ . Dieses Rechteck  $R$  im Parameterbereich induziert ein - in gewisser Weise - approximierendes Parallelogramm auf der Fläche, nämlich das Parallelogramm aufgespannt durch die beiden Tangentialvektoren

$$|\delta u_0| \cdot \partial_u \sigma|_{(u_0, v_0)} \quad \text{und} \quad |\delta v_0| \cdot \partial_v \sigma|_{(u_0, v_0)}. \quad (76)$$

Der Flächeninhalt dieses Parallelogramms ist durch

$$|\delta u_0| |\delta v_0| |\partial_u \sigma \times \partial_v \sigma| \quad (77)$$

gegeben.

Verfeinerung der Approximation und Grenzwert der Summe der entsprechenden Flächeninhalte führt zu dem Begriff des Oberflächenintegrals.

**Proposition and Definition 122.**

Sei  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche, dann heißt

$$dA := |\partial_u \sigma \times \partial_v \sigma| \, du \, dv = \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv \quad (78)$$

das *Flächenelement* und

$$A(\sigma(U)) = \int \int_{\bar{U}} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv \quad (79)$$

die *Oberfläche* von  $\sigma(U)$ .



**Bemerkung 123.**

Die Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^2$  sei hier so vorausgesetzt, dass wir über  $\bar{U}$  integrieren können. In unserem Fall wird das oft ein abgeschlossenes Rechteck  $[a, b] \times [c, d] \in \mathbb{R}^2$  sein, im Allgemeinen genügt aber ein kompaktes, messbares und zusammenhängendes Gebiet (zum Beispiel die abgeschlossene Kreisscheibe).

*Beweis.* Da für vier Vektoren  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$  gilt

$$(a \times b)(c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c), \quad (80)$$

folgt

$$\begin{aligned} |\partial_u \sigma \times \partial_v \sigma| &= \sqrt{(\partial_u \sigma \times \partial_v \sigma)(\partial_u \sigma \times \partial_v \sigma)} \\ &= \sqrt{(\partial_u \sigma \cdot \partial_u \sigma)(\partial_v \sigma \cdot \partial_v \sigma) - (\partial_u \sigma \cdot \partial_v \sigma)^2} \\ &= \sqrt{EG - F^2}. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 124.**

Man kann zeigen, dass das Oberflächenintegral unabhängig von der Parametrisierung ist. (siehe zB Bolton §3.9)

**Beispiel 125** (Sphäre).

Die Oberfläche der Sphäre, parametrisiert durch

$$(0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (81)$$

$$(u, v) \mapsto (r \sin v \cos u, r \sin v \sin u, \cos v), \quad (82)$$

berechnet sich zu

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin v \, dv \, du = \int_0^{2\pi} 2r^2 \, du = 4\pi r^2.$$

**Beispiel 126** (Oberflächenintegrale).

Parametrisieren wir den *Rotationstorus* durch

$$\sigma : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) =: U \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$(u, v) \mapsto ((a + b \cos v) \cos u, (a + b \cos v) \sin u, b \sin v),$$

wobei  $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ , dann lautet die erste Fundamentalform

$$I = (a + b \cos v)^2 du^2 + b^2 dv^2 \quad (83)$$

und das Flächenelement ist somit durch

$$dA = (a + b \cos v)b \, du \, dv \quad (84)$$

gegeben. Die Oberfläche des Torus berechnet sich daher zu

$$A(\sigma(U)) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (a + b \cos v)b \, du \, dv = 4\pi^2 ab.$$

Um im Folgenden Aussagen über die Oberfläche einer Minimalfläche im Vergleich zu anderen Flächen machen zu können, müssen wir die 'anderen' Flächen beschreiben. Dies wird durch den Begriff der Normalvariation einer Fläche realisiert:

**Definition 127.**

Sei  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche, dann ist die *Normalvariation von  $\sigma$*  bestimmt durch  $h \in C^\infty(U)$  die 1-Parameterfamilie

$$t \mapsto \sigma^t(u, v) := \sigma(u, v) + t h(u, v)N(u, v), \quad (85)$$

wobei  $t \in \mathbb{R}$ .

Beachte, für  $t = 0$  erhalten wir die ursprüngliche Fläche  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Weiters kann  $\varepsilon > 0$  so gewählt werden, dass  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  eine Schar von regulären Flächen ergibt.

**Beispiel 128.**

Wird  $h \in C^\infty U$  als konstante Funktion gewählt, ergibt die Normalvariation die Familie von Parallellflächen von  $\sigma$ .

Da sich die Koeffizienten der ersten Fundamentalform bezüglich der Normalvariation verändern, verändert sich auch die Oberfläche. Wir wollen diesen Zusammenhang im nächsten Abschnitt näher untersuchen und machen noch die folgende Definition

**Definition 129.**

Sei  $\sigma^t$  eine Normalvariation von  $\sigma$  bestimmt durch die Funktion  $h \in C^\infty(U)$ , dann heißt das Funktional

$$t \mapsto A(\sigma^t(U)) = \iint_{\bar{U}} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} \, du \, dv \quad (86)$$

das *Oberflächenfunktional bezüglich der Normalvariation  $\sigma^t$* .

## 4.2 Minimalflächen

### Definition 130.

Eine Fläche mit verschwindender mittlerer Krümmung,  $H \equiv 0$ , heißt *Minimalfläche*.

---

*Recap*

---

Die mittlere Krümmung lässt sich mit Hilfe der ersten und zweiten Fundamentalform darstellen:

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}.$$


---

**Frage:** in welcher Weise sind diese Flächen 'minimal'?

### Theorem 131.

Eine Fläche  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist Minimalfläche genau dann wenn sie kritischer Punkt des Oberflächenfunktionals bezüglich jeder Normalvariation ist, d. h.

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A(\sigma^t) = 0 \tag{87}$$

für die Normalvariation bezüglich jeder beliebigen Funktion  $h \in C^\infty(U)$ .

Für den Beweis des Theorems benötigen wir die erste Ableitung des Oberflächenfunktionals:

### Lemma 132.

Für eine Normalvariation  $\sigma^t$  von  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  bestimmt durch  $h \in C^\infty(U)$  gilt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A(\sigma^t) = -2 \iint_{\bar{U}} hH \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv, \tag{88}$$

wobei  $E, F$  und  $G$  die Koeffizienten der ersten Fundamentalform von  $\sigma = \sigma^0$  bezeichnen.

*Beweis.* Da wir an der ersten Ableitung an der Stelle  $t = 0$  interessiert sind, können wir Terme der Ordnung 2 und höher vernachlässigen. Wir bezeichnen diese mit  $O(t^2)$ .

Da

$$\begin{aligned} \sigma_u^t &= \sigma_u + th_u N + thN_u, \\ \sigma_v^t &= \sigma_v + th_v N + thN_v, \end{aligned}$$

erhalten wir als die Koeffizienten der ersten Fundamentalform von  $\sigma^t$

$$\begin{aligned} E^t &= E - 2the + O(t^2), \\ F^t &= F - 2thf + O(t^2), \\ G^t &= G - 2thg + O(t^2). \end{aligned}$$

Die Flächenelemente der Flächen  $\sigma^t$  in der Normalvariation lauten daher

$$\begin{aligned} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} dudv &= \sqrt{(EG - F^2)(1 - 4thH) + O(t^2)} dudv \\ &= \sqrt{EG - F^2} \sqrt{1 - 4thH + O(t^2)} dudv \\ &= \sqrt{EG - F^2} (1 - 2thH) + O(t^2) dudv \end{aligned}$$

und wir erhalten somit

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A(\sigma^t) = -2 \iint_{\bar{U}} hH \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

□

*Beweis des Theorems 131.* Ist  $\sigma$  eine Minimalfläche und daher  $H = 0$ , dann gilt Gleichung (87) nach dem vorigen Lemma.

Die Gegenrichtung beweisen wir mit einem indirekten Beweis: angenommen (87) gilt für jede Normalvariation von  $\sigma$  und  $\sigma$  ist keine Minimalfläche. Dann existiert ein  $p \in U$ , sodass  $H(p) \neq 0$  und wegen der Stetigkeit der mittleren Krümmung gibt es daher eine offene Umgebung  $U_\delta(p)$  von  $p$  auf der die mittlere Krümmung nicht verschwindet.

Insbesondere gilt die Annahme auch für die Normalvariation bestimmt durch die Funktion  $h := H \in C^\infty(U)$  und wir erhalten

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A(\sigma^t) = -2 \iint_{\bar{U}} H^2 \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (89)$$

Da der Integrand  $H^2 \sqrt{EG - F^2} \geq 0$  und auf  $U_\delta(p)$  strikt positiv ist, folgt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A(\sigma^t) < 0 \quad (90)$$

und wir erhalten einen Widerspruch zur Annahme. □

**Ziel:** weitere Beschreibungen von Minimalflächen

**Proposition 133.**

Sei  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine konform parametrisierte Fläche mit erster Fundamentalform  $I = \lambda^2(u, v)\{du^2 + dv^2\}$ , dann gilt für die mittlere Krümmung

$$|H| = \frac{1}{2\lambda^2} |\sigma_{uu} + \sigma_{vv}|. \quad (91)$$

*Beweis.* Für eine konforme Parametrisierung erhalten wir als Ausdruck für die mittlere Krümmung

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{2\lambda^2} \{(\sigma_{uu} + \sigma_{vv}) \cdot N\} \quad (92)$$

und, falls  $(\sigma_{uu} + \sigma_{vv}) \cdot N \neq 0$ , somit für den Betrag

$$|H| = \frac{1}{2\lambda^2} \{|\sigma_{uu} + \sigma_{vv}| |N|\} = \frac{1}{2\lambda^2} |\sigma_{uu} + \sigma_{vv}|.$$

Die Bedingung  $(\sigma_{uu} + \sigma_{vv}) \cdot N \neq 0$  gilt jedoch für jede konforme Parametrisierung: Differenzieren der Gleichungen

$$\sigma_u \cdot \sigma_u = \sigma_v \cdot \sigma_v \quad \text{und} \quad \sigma_u \cdot \sigma_v = 0,$$

zeigt, dass

$$(\sigma_{uu} + \sigma_{vv}) \cdot \sigma_u = 0 \quad \text{und} \quad (\sigma_{uu} + \sigma_{vv}) \cdot \sigma_v = 0$$

und daher  $\sigma_{uu} + \sigma_{vv} \parallel N$ . □

Daraus schließen wir sofort die folgende charakterisierende Bedingung für Minimalflächen:

**Korollar 134.**

Sei  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine konforme Parametrisierung. Die Fläche  $\sigma(U)$  ist eine Minimalfläche genau dann wenn  $\sigma$  eine harmonische Funktion ist, d. h.

$$\Delta\sigma := \sigma_{uu} + \sigma_{vv} = 0. \quad (93)$$

Diese Charakterisierung erlaubt uns nun alle Rotationsflächen, die Minimalflächen sind, zu bestimmen:

**Beispiel 135** (Rotationsflächen).

Wir parametrisieren eine beliebige Rotationsfläche mit Profilkurve  $u \mapsto (r(u), h(u))$  mit Hilfe einer konformen Parametrisierung:

$$\sigma(u, v) \mapsto (r(u) \cos v, r(u) \sin v, h(u)), \quad (94)$$

wobei  $r^2 = r'^2 + h'^2$ . Nach Korollar 134, handelt es sich um eine Minimalfläche genau dann wenn

$$\Delta\sigma = 0 \quad (95)$$

$$\Leftrightarrow r'' = r \quad \text{und} \quad h'' = 0 \quad (96)$$

$$\Leftrightarrow r(u) = a \cosh u + b \sinh u \quad \text{und} \quad h(u) = cu + d, \quad (97)$$

wobei  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  die Relation  $a^2 - b^2 = c^2$  erfüllen.

1. Fall Ist  $c = 0$ , dann folgt  $a = \pm b$ , sowie

$$r(u) = ae^{\pm u} \text{ und } h(u) = d \quad (98)$$

und  $\sigma$  parametrisiert somit eine Ebene.

2. Fall Ist  $c \neq 0$ , dann existiert ein  $u_0 \in \mathbb{R}$  sodass

$$a = c \cosh u_0 \text{ und } b = c \sinh u_0. \quad (99)$$

Die Profilkurve ist somit von der Form

$$r(u) = c \cosh(u + u_0) \text{ und } h(u) = c(u + u_0) + d - cu_0 \quad (100)$$

und  $\sigma$  parametrisiert somit ein Katenoid.

Wir haben also gezeigt, dass eine Rotationsfläche eine Minimalfläche ist genau dann wenn sie eine Ebene oder ein Katenoid ist.

Da Minimalflächen ohne Flachpunkte zur Klasse der Isothermflächen gehören, kann man eine spezielle konforme Parametrisierung wählen:

**Proposition 136.**

Eine Minimalfläche ohne Flachpunkte besitzt (lokal) eine konforme Krümmungslinienparametrisierung.

*Beweis.* Sei  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$  Krümmungslinienparametrisierung einer Minimalfläche mit Hauptkrümmungen  $\kappa^\pm = \pm\kappa$ , wobei  $\kappa > 0$ .

Aus den Codazzi-Gleichungen erhalten wir

$$0 = \frac{\kappa_v^+}{\kappa^+ - \kappa^-} + \frac{E_v}{2E} = \frac{1}{2}(\ln \kappa E)_v \quad \text{und} \quad 0 = -\frac{1}{2}(\ln \kappa G)_u$$

und wählen daher als Krümmungslinien erhaltende Umparametrisierung  $\tilde{\sigma}(\tilde{u}, \tilde{v}) := \sigma(u(\tilde{u}), v(\tilde{v}))$  mit

$$\begin{aligned} u'^2 &= \frac{1}{\kappa E}(u), \\ v'^2 &= \frac{1}{\kappa G}(v). \end{aligned}$$

Dies liefert eine konforme Krümmungslinienparametrisierung mit

$$\tilde{E} = \tilde{G} = \frac{1}{\tilde{\kappa}}. \quad (101)$$

□

**Theorem 137** (Christoffel-Dualität für Minimalflächen).

Sei  $N : U \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$  eine konforme Abbildung, sodass  $|N_u|^2 = |N_v|^2 = \kappa$  und  $N_u \cdot N_v = 0$ . Dann ist das System

$$\begin{aligned}\sigma_u &= -\frac{1}{\kappa}N_u, \\ \sigma_v &= \frac{1}{\kappa}N_v\end{aligned}\tag{102}$$

integrierbar und  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  liefert eine Minimalfläche.

Jede Minimalfläche ohne Nabelpunkte kann (lokal) auf diese Weise konstruiert werden.

*Beweis.* (1) Integrierbarkeit des Systems (102):

Nach dem Poincare-Lemma ist das System 1.Ordnung integrierbar genau dann wenn

$$0 = (\sigma_u)_v - (\sigma_v)_u = \frac{2}{\kappa} \left\{ N_{uv} - \frac{\kappa_v}{2\kappa} N_u - \frac{\kappa_u}{2\kappa} N_v \right\}.\tag{103}$$

Nach den Voraussetzungen für die Abbildung  $N$ , gelten die Relationen

$$\begin{aligned}N_{uv} \cdot N_u &= \frac{\kappa_v}{2}, \\ N_{uv} \cdot N_v &= \frac{\kappa_u}{2}, \\ N_{uv} \cdot N &= 0\end{aligned}$$

und es folgt somit

$$N_{uv} = \frac{\kappa_v}{2} N_u + \frac{\kappa_u}{2} N_v.\tag{104}$$

(2)  $\sigma$  ist Minimalfläche:

Da die erste und zweite Fundamentalformen von  $\sigma$  durch

$$\text{I} = \frac{1}{\kappa}(du^2 + dv^2)\tag{105}$$

$$\text{II} = du^2 - dv^2\tag{106}$$

gegeben sind, handelt es sich um eine Krümmungslinienparametrisierung mit den beiden Hauptkrümmungen

$$\kappa_1 = \kappa \quad \text{und} \quad \kappa_2 = -\kappa.\tag{107}$$

(3) Konstruktion liefert alle Minimalflächen

Nach Proposition 136, kann jede Minimalfläche ohne Nabelpunkte lokal durch konforme Krümmungslinien parametrisiert werden; sei  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$  so eine Parametrisierung mit Gauß-Abbildung  $N$ , dann gilt nach Rodriguez-Gleichungen

$$\sigma_u = -\frac{1}{\kappa}N_u \quad \text{und} \quad \sigma_v = \frac{1}{\kappa}N_v$$

und wir erhalten

$$|N_u|^2 = |N_v|^2 = \kappa^2 E = \kappa \quad \text{und} \quad N_u \cdot N_v = 0.$$

Die Gauß-Abbildung  $N$  von  $\sigma$  liefert also umgekehrt die gewünschte Abbildung.  $\square$

#### 4.2.1 Isometrische Deformation und eine Verbindung zur komplexen Analysis

---

*Recap*

---

*Komplexe Analysis - Differenzierbarkeit von komplexen Funktionen*

Wir identifizieren  $\mathbb{R}^2$  mit den komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  via

$$\mathbb{R}^2 \ni (u, v) \cong u + iv \in \mathbb{C}.$$

Eine komplexe Funktion  $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$\psi(z) = \operatorname{Re}(\psi) + i\operatorname{Im}(\psi) = x(u, v) + iy(u, v),$$

wobei  $x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , ist komplex differenzierbar in  $z_0$  genau dann wenn die *Cauchy-Riemann-Gleichungen*

$$x_u = y_v \quad \text{und} \quad x_v = -y_u$$

an der Stelle  $z_0$  erfüllt sind. Die Funktion  $\psi$  heißt *holomorph in  $z_0$* , falls eine Umgebung von  $z_0$  existiert in der  $\psi$  komplex differenzierbar ist.

Die Funktion  $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *holomorph auf  $D \subset \mathbb{C}$* , falls  $\psi$  holomorph für jedes  $z_0 \in D$ .

---

#### **Lemma 138.**

Sei  $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\psi(z) = x(u, v) + iy(u, v)$  eine holomorphe Funktion auf  $D$ , dann sind  $x(u, v)$  und  $y(u, v)$  zwei harmonische Funktionen.

*Beweis.* Ist  $\psi$  eine holomorphe Funktion, dann gelten die Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$x_u = y_v \quad \text{und} \quad x_v = -y_u. \tag{108}$$

Differenzieren dieser Gleichungen vervollständigt den Beweis:

$$\begin{aligned} x_{uu} &= y_{uv}, & y_{vv} &= x_{uv}, \\ x_{vv} &= -y_{uv}, & y_{uu} &= -x_{uv}. \end{aligned}$$

$\square$



**Proposition and Definition 139.**

Sei  $(u, v) \mapsto x(u, v)$  eine harmonische Funktion, dann existiert eine harmonische Funktion  $(u, v) \mapsto y(u, v)$ , sodass  $\psi(z) := x(u, v) + iy(u, v)$  eine holomorphe Funktion ist.

Die Funktion  $y$  heißt *konjugiert harmonisch zu  $x$*  und ist bis auf die Addition einer reellen Konstanten eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Die Existenz der Funktion  $(u, v) \mapsto y(u, v)$  folgt aus den Cauchy-Riemann-Gleichungen.  $\square$

In Korollar 134 haben wir bereits gesehen, dass konform parametrisierte Minimalflächen eng mit harmonischen Funktionen zusammenhängen: es sei

$$\begin{aligned} \sigma : U &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \sigma(u, v) =: (\sigma_1(u, v), \sigma_2(u, v), \sigma_3(u, v)) \end{aligned}$$

eine konform parametrisierte Minimalfläche, dann sind die Koordinatenfunktionen  $\sigma_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , harmonische Funktionen.

Nach Proposition 139, gibt es daher zu jeder Koordinatenfunktion eine konjugiert harmonische Funktion. Sei also  $\hat{\sigma} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  so definiert, dass  $\hat{\sigma}_i$  jeweils konjugiert harmonisch zu  $\sigma_i$  ist und  $\sigma$  und  $\hat{\sigma}$  die Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$\sigma_u = \hat{\sigma}_v, \quad \text{und} \quad \sigma_v = -\hat{\sigma}_u \tag{109}$$

erfüllen. Wir nennen die Fläche  $(u, v) \mapsto \hat{\sigma}(u, v)$  die *konjugierte Fläche zu  $\sigma$* .

**Theorem 140.**

Sei  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$  eine konform parametrisierte Minimalfläche mit einer konjugierten Fläche  $(u, v) \mapsto \hat{\sigma}(u, v)$ . Dann definiert

$$\sigma^\theta := \cos \theta \sigma + \sin \theta \hat{\sigma}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{110}$$

eine 1-Parameterfamilie von Minimalflächen, die *assoziierte Familie von  $\sigma$* .

Alle Flächen  $\sigma^\theta$  der assoziierten Familie besitzen dieselbe Gauß-Abbildung und erste Fundamentalform, sind daher isometrisch zueinander. Weiters gilt, dass die Bahnkurve jedes Flächenpunkts in dieser Deformation eine Ellipse ist.

*Beweis.* Nach den Cauchy-Riemann-Gleichungen (109) gilt

$$\sigma_u^\theta = \cos \theta \sigma_u + \sin \theta \hat{\sigma}_u = \cos \theta \sigma_u - \sin \theta \sigma_v, \tag{111}$$

$$\sigma_v^\theta = \cos \theta \sigma_v + \sin \theta \hat{\sigma}_v = \cos \theta \sigma_v + \sin \theta \sigma_u \tag{112}$$

und die Tangentenvektoren  $\{\sigma_u^\theta, \sigma_v^\theta\}$  werden somit aus  $\{\sigma_u, \sigma_v\}$  durch Rotation um den Winkel  $-\theta$  erzeugt. Daher folgt

$$\sigma_u^\theta \times \sigma_v^\theta = \sigma_u \times \sigma_v \quad (113)$$

und die Gauß-Abbildungen aller Flächen  $\sigma^\theta$  stimmen somit punktweise überein.

Weiters zeigt die Berechnung der Koeffizienten  $E^\theta, F^\theta$  und  $G^\theta$  die Unabhängigkeit vom Winkel  $\theta$  und die ersten Fundamentalformen aller  $\sigma^\theta$  stimmen somit überein.

Insbesondere sind somit alle Flächen konform parametrisiert und wir können Korollar 134 anwenden: da  $\sigma$  und  $\hat{\sigma}$  harmonisch sind, ist auch  $\sigma^\theta$  für alle  $\theta \in \mathbb{R}$  harmonisch und parametrisiert somit eine 1-Parameterfamilie von Minimalflächen.  $\square$

**Beispiel 141.**

Die assoziierte Familie des Helikoids ist durch

$$(u, v) \mapsto \sigma^\theta := \begin{pmatrix} \sinh u \cos v \cos \theta - \cosh u \sin v \sin \theta \\ \sinh u \sin v \cos \theta + \cosh u \cos v \sin \theta \\ v \cos \theta + u \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (114)$$

gegeben. Sie enthält als konjugierte Fläche das Katenoid.